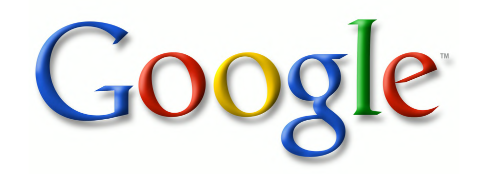
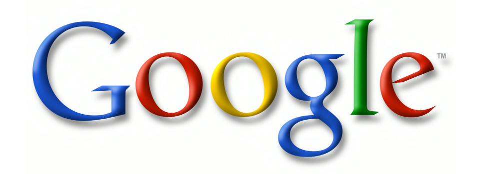



Google


B 937,828

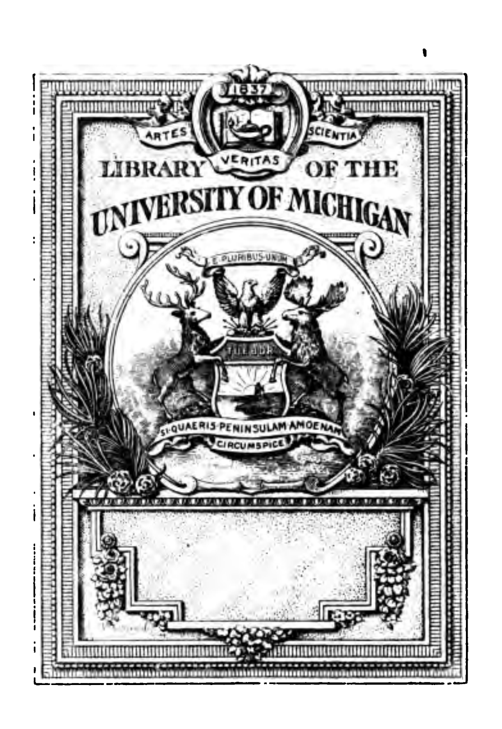
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

„So soll ich denn mit saurem Schweiss
Euch lehren, was ich selbst nicht weiss.

Dieses Wort Faust's ist wohl Niemandem so sehr aus der Seele gesprochen wie dem, der über die wahre Natur der Elektricität vortragen will. Möge man daher dies bischen Poesie als Einleitung zu trockenen Formeln nicht mit allzu schelen Augen ansehen.

Gauss soll einmal einem Freunde auf die Frage nach den Fortschritten einer dringenden Arbeit geantwortet haben: „Alle Formeln und Resultate sind fertig, nur den Weg muss ich noch finden, auf dem ich dazu gelangen werde.“ Ich glaube nicht, dass Gauss dies gesagt hat, er war nicht so aufrichtig; gedacht hat er es gewiss oft. Anders Maxwell; er schildert uns genau, zu welchem Zwecke er die sechseckigen Aetherzellen, die in den Zellwänden beweglichen Friktionsrollen und alle anderen Embleme seiner ersten Theorie, die er einmal selbst *somewhat awkward* nennt, erfand; er erzählt, welche ihm die meiste Mühe machten und wie er damit zu den Formeln gelangte, deren Gewalt Hertz in seinem Heidelberger Vortrage so gut charakterisirt. Später gab er wohl eine einfachere Begründung


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



mehr dieses unsere völlige Unbekanntschaft mit der Natur der Elektricitätsbewegung postulirende Büchlein liest. Mögen dann immerhin Andere die Früchte unseres Strebens ernsten, aber von den Theorien und Experimenten, zu deren Auseinandersetzung ich jetzt schreiten will, mögen sie dann sagen: „es ging ein Frühling auf in jenen Tagen!“

München, im März 1891.

Ludwig Boltzmann.

Inhaltsverzeichniss.

Art. Seite

Erste Vorlesung.

Einleitung; Lagrange's Bewegungsgleichungen.

1. Fernwirkung oder Medium? 1
2. 3. Newton 1
4. Fernwirkende Molekularkraft. Weber, Zöllner 2
5. Faraday, Thomson, Maxwell 2
6. Fortpflanzungszeit ohne Medium 2
7. Noch einmal die Molekularkräfte 3
8. Wir betrachten den Galvanismus vor der Reibungselektricität 3
9. 1. Erfahrungssatz. (Existenz elektrischer Ströme) 4
10. 1. Hypothese. Mechanische Natur elektrischer Ströme . . 4
11. 2. Erfahrungssatz (elektrische Ströme sind stationär) . . . 4
12. Cykeln 5
13. Unechte Cykeln, deren Bedeutung in der Technik 5
14. Allgemeine Coordinaten 6
15. Allgemeine Kräfte 6
16. Lagrange's Bewegungsgleichungen 7

Zweite Vorlesung.

Mechanische Analogie des zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre.

17. Beispiel 8
18. Mechanische Analogie des zweiten Hauptsatzes 9
19. Kreisprocesse 9
20. Erster Theilprocess 10
21. Zweiter Theilprocess 10
22. Dritter Theilprocess 11
23. Vierter Theilprocess 11
24. Berechnung der geleisteten Arbeit 12
25. Nicht umkehrbare Kreisprocesse 12
26. Die Theorien sind blosse Bilder der Naturprocesse 13

Art. Seite

Dritte Vorlesung.
Bewegungsgleichungen für Cykeln; Beispiele.

27. Specialisirung der Gleichungen 2 14
28. Cyklische Coordinaten 14
29. Langsam veränderliche Coordinaten 15
30. Der Zustand ist Funktion von k und l' 15
31. Bewegungsgleichungen für Cykeln 16
32. Sind alle eingeführten Vernachlässigungen begründet? . . 16
33. Monocykeln. 2. Hypothese: Die v sind lineare Funktionen der l' 18
34. Beispiele von Monocykeln 20
35. Ein elektrischer Strom ist ein Monocykel 22
36. Bewegungshindernisse 22

Vierte Vorlesung.
Bicykel. Absolute Strommessung.

37. Bicykeln 24
38. Beispiele von Bicykeln 25
39. Idealer Mechanismus; Gleichungen für denselben 25
40. Discussion 28
41. 3. Erfahrungssatz (besser Definition der Stromintensität) . . 29
42. Absolute Messung der Stromintensität l' 30
43. 4. Erfahrungssatz. Joule's Gesetz. Messung von ω . . . 31
44. Ohm's Gesetz ist Consequenz unserer Annahmen. Messung von L 31

Fünfte Vorlesung.
Bewegungshindernisse im Dielektricum. Zwei Stromkreise mit Condensatoren. Messung der übrigen Grössen.

45. Widerstand am Modell 32
46. 5. Erfahrungssatz. Widerstand am Dielektricum 32
47. 3. Hypothese. Ergänzung zum 2. Erfahrungssatze 33
48. Gleichungen für die elektrischen Oscillationen 34
49. Bedeutung des Modells in der Theorie. Theorie einer unbekannten Bewegung 35
„ Discussion der Gleichungen 16 36
50. Erhaltung der Arbeit. Joule'sche Wärme 36
„ Auf Dielektrisirung verbrauchte Arbeit. Aeussere Arbeit.
„ Elektrokinetische Energie 37
51. Messung von A 38
„ Messung von ϑ 39

Art. Seite
52. Messung von C 39
53. Andere Schaltungen von Cond. und Widerstand 40

Sechste Vorlesung.

Praktische Ausführung der Modelle.

54. Mechanismus, um A, B, C unabhängig veränderlich zu machen 42
„ 1. Theilmechanismus 43
„ 2. Theilmechanismus 44
55. Praktische Ausführung solcher Modelle 44
„ Reales Monocykel 45
56. Reales Bicykel 46
57. 58. Experimente mit dem realen Bicykel. 48

Siebente Vorlesung.

Polycykel. Begriff des Momentes.

59. Uebergang zu neuen Phänomenen 49
60. Polycykeln 49
61. 62. Corollar zur 3. Hypothese.: die in den Elementen thätigen Mechanismen sind, wie die der ganzen Ströme, den obigen Gleichungen unterworfen 50
63. Aufstrom 51
64. Lebendige Kraft des Polycykels 51
65. Wovon hängt das Moment eines Stromes ab? 52
„ Moment eines Curvenelementes und einer Curve 52
66. 6. Erfahrungssatz: der Strom hat eine Richtung 53
67. Elektromotorische Kraft im Aufstrom. 53
68. Moment einer Summe (Consequenz) 54
„ $J(ds)$ ist proportional ds 55
„ $J(s) = \int J ds$, J als Linienintegral 55
69. Ponderomotorische Kraft auf den Aufstrom 55
70. Elektrokinetische Energie des Aufstroms. 56

Achte Vorlesung.

Eigenschaften des Momentes. Stokes' Satz.

71. J als Flächenintegral (Consequenz). 57
72. Componenten des Momentes J. (Consequenz) 58
73. Momentenvektor 59
74. Coordinatensystem mit Rechtsschraubendrehung (Weinrankendrehung) 60
75. Stokes' Satz in der Ebene 60

Art. Seite
76. Stokes' Satz im Raume 62
„ Vektor, Componenten und Gleichungen der magnetischen Induktion 63
77. Solenoide. 66
78. 7. Erfahrungssatz. Auf geschlossene Solenoide wirkt keine Kraft 68
79. Kräfte auf offene Solenoide 69
80. 8. Erfahrungssatz. Biot-Savart's Fundamentalversuch . . 70

Neunte Vorlesung.

Elektrische Ströme in Körpern.

81. Strömung im Raum 71
„ 9. Erfahrungssatz. Ströme in Körpern sind ebenfalls gerichtet. Stromdichte 71
„ 4. Hypothese. Superposition der Wirkung ∞ naher Ströme 72
82. Componenten der Stromdichte. Stokes' Stromgleichungen 75
83. 5. Hypothese. Jedes Längenelement liefert zu ω einen unabhängigen Betrag 76
„ 6. Hypothese. Die elektromotorische Kraft lässt sich in Componenten zerlegen 76
„ Componenten der galvanischen Kraft 77
„ Specifische Leitungsfähigkeit 77
84. Joule's Wärme im Volumelemente 77
„ Elektrokinetische Energie eines Volumelementes 78
85. Componenten der dielektrischen Polarisation 78
„ Reibungselektromotorische Kraft 78
„ Dielektrisirungszahl 79
„ Dielektrisirungsgleichungen 79
„ Energie der dielektrischen Polarisation in einem Volumelemente 79
86. 7. Hypothese. Superpositionsprincip im leitenden Dielektricum 79
„ Componenten des totalen und des galv. geleiteten Stromes 80
„ Superpositionsgleichungen 80
„ Widerstandsgleichungen 80

Zehnte Vorlesung.

Gesetze der stationären und angenähert stationären Strömung.

87. Continuitätsgleichung der Induction und der Strömung . 82
88. Zusammenstellung der Vektoren 83
„ Recapitulation der Gleichungen 84

Art.		Seite
89.	Coulomb's Gesetz für Magnetpole	85
90.	Moment eines linearen Stromes auf einen Punkt	87
„	Gleichungen Kirchhoff's für Strömung im Raum	88
„	Biot-Savart's Gesetz	89
91.	Neumann's Gesetz für die Induction	90

Elfte Vorlesung.

Ampère's Gesetz. Elektrische Schwingungen.

92.	Arbeit bei Deformation eines linearen Stroms	92
„	Ableitung des Ampère'schen Gesetzes	93
„	Vorzüge der Maxwell'schen Theorie	96
93.	μ im Standard-Medium	97
94.	Allgemeine Gleichungen für elektrische Schwingungen	97
„	Die elektrischen Wellen sind transversal	99
„	Lineare, circulare, elliptische Polarisation	99
95.	Wellen in Isolatoren	100
„	Fortpflanzungsgeschwindigkeit	100
„	Richtung der magnetischen Schwingungen	100
96.	Wellen in Halbleitern	101
„	Dispersion	102
„	Absorption	102
„	Auswählende Absorption	102
„	Dielektrische Nachwirkung	102
„	Wellen in Leitern	103

Zwölfte Vorlesung.

Elektrostatik.

97.	Gleichung der freien Elektricität	104
98.	Dichte der Elektricität	106
99.	Leiter, Isolatoren	106
100.	101. Unzerstörbarkeit der elektrischen Quantität	107
102.	Ansammlung der Elektricität an der Oberfläche eines Leiters	108
103.	Componenten und Gleichungen der (inneren) elektromotorischen Kraft	110
104.	Flächendichte der Elektricität	111

Dreizehnte Vorlesung.

Ponderomotorische Kräfte elektrisirter Kugeln; deren Abhängigkeit von *k*.

105.	Elektrostatische Fernwirkung	112
106.	Gleichförmig elektrisirte Kugel	112

Art. Seite
106. Zwei gleichförmig elektrisirte Kugeln 112
107. Elektricitätsmenge auf einer leitenden Kugel 116
108. Elektricitätsmenge in einer isolirenden Kugel 117
109. Abhängigkeit der Wirkungen von k und μ 118

Vierzehnte Vorlesung.

Statisches und magnetisches Maass. Elektrostatische Kräfte allgemein. Magnete. Schluss.

110. Statisches Maass 119
111. Umrechnung beider Maasssysteme 119
112. Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen in Luft 120
113. Selbstpotential einer elektrischen Kugel 121
114. Allgemeine Berechnung der Fernwirkung statischer Elektricität 121
115. Experimentelle Bestimmung der Dielektricitätsconstante . 123
116. Magnetisirungsgleichungen 125
„ Magnetismus 126
1. Anhang. Literaturübersicht 128
2. Anhang. Zusammenstellung der Bezeichnungen (Schlüssel) . 138

Erste Vorlesung.

Einleitung; Lagrange's Bewegungsgleichungen.

1. Die tägliche Erfahrung lehrt, dass wir den Bewegungszustand eines Körpers nicht beeinflussen können, wenn wir denselben nicht entweder direkt berühren, oder uns wenigstens durch eine, die Einwirkung übertragende Brücke (ein Zwischenmedium) in Gestalt eines Fadens, einer Stange oder selbst nur des Hauches unseres Mundes mit ihm in Verbindung setzen. Als man daher zuerst Magnetpole und später elektrisirte Körper aus gewissen Entfernungen auf einander wirken sah, konnte man sich dies nicht anders denken, als dass die Wirkung durch ein Zwischenglied, etwa eine feine, von den Körpern ausströmende Flüssigkeit, übertragen werde.[1]) *Fernwirkung oder Medium?*

2. Es ist bekannt, auf wie hartnäckigen Widerspruch Newton bei Aufstellung seines Gravitationsgesetzes stiess. Newton selbst neigte der Ansicht zu, dass die Fernwirkung zwischen den Himmelskörpern durch ein Medium übertragen werde; allein er unterliess es, uns irgend etwas Näheres von seiner Ansicht über die Beschaffenheit dieses Mediums mitzutheilen, treu seinem Grundsatze: hypotheses non fingo. *Newton.*

3. Erst später vergass man hierauf und schrieb wohl gar den Namen Newton's auf das Banner der Theorie der unvermittelten Fernwirkung. Dies kam so: die Fernwirkungstheorie errang Triumph auf Triumph; nebenbei wurden zwar beständig Hypothesen über die Natur eines etwa sie vermittelnden Mediums aufgestellt; allein diese hatten keinen

[1]) Gilbert, *De magnete* etc. London 1600, liber II. cap. III u. IV.

nennenswerthen Erfolg. Selbst Goethe interessirte sich für die Frage (vgl. ein bekanntes Gedicht von ihm). Da gelangten die namhaftesten Forscher endlich zu der Ansicht, das Medium sei wohl überhaupt überflüssig und die Wirkung erfolge direkt ohne alle Vermittelung in die Ferne.

Fernwirkende Molekularkraft.

4. Da die Gesetze der magnetischen und elektrischen Erscheinungen ganz denselben Grundtypus zeigen wie das Gravitationsgesetz, so war es selbstverständlich, dass man auch diese Erscheinungen einer direkten Fernwirkung zuschrieb, ja Navier, Poisson, Cauchy und viele Andere versuchten auch die Molekularkräfte nach demselben Schema zu erklären; nur setzten sie hierbei an die Stelle der Newton'schen Funktion der Entfernung, da diese hier doch nicht allgemein auszureichen schien, meist eine andere, gewöhnlich unbekannt gelassene Funktion der Entfernung. Namentlich in Deutschland und Frankreich basiren die meisten neueren Abhandlungen und Lehrbücher auf diesem Grundgedanken, der durch Wilhelm Weber zur höchsten Vollendung gebracht wurde. Am energischsten vertrat Zöllner die Ansicht, dass das von Weber modificirte Newton'sche Fernwirkungsgesetz der wahre Schlüssel zur Erklärung der gesammten Natur sei. Ja mehr oder minder haben wir alle die Ideen von den direkt in die Ferne wirkenden magnetischen und elektrischen Fluiden gewissermassen mit der Muttermilch eingesogen.

Weber, Zöllner.

Faraday, Thomson, Maxwell.

5. Da ging gerade von England, dem die eigentliche Basis der Fernwirkungslehre entstammte, auch wieder die Gegenströmung aus. Faraday hatte sein ganzes Leben hindurch nie an eine unvermittelte Fernwirkung geglaubt; Sir William Thomson entwickelte dessen Ideen weiter, bis Maxwell aus denselben eine Theorie der magnetischen und elektrischen Erscheinungen schuf, welche unbeschadet der grossen Verdienste seiner Nachfolger doch wohl mit Recht für immer die Maxwell'sche Theorie genannt werden wird.

Fortpflanzungszeit ohne Medium.

6. Es mag noch erwähnt werden, dass nicht lange nach Maxwell auch Gauss, Riemann, Lorenz, Karl Neumann und Edlund sich dessen Ideen näherten, indem sie annahmen, dass die Fernwirkung Zeit zu ihrer Fortpflanzung

brauche, was doch wohl nur erklärlich ist, wenn sie durch ein Medium übertragen wird. Allein da sie bloss diese zur Fortpflanzung nothwendige Zeit, sonst aber das Medium in keiner Weise berücksichtigten, so mussten nothwendig ihre Theorien an innerer Consequenz hinter der Maxwell's weit zurückbleiben. Auch Hankel's mechanische Theorie der Elektricität ist noch zu erwähnen.

Die Theorie Maxwell's ist den uns zur Gewohnheit gewordenen Ideen so diametral entgegengesetzt, dass wir zuerst alle unsere bisherigen Anschauungen von dem Wesen und der Wirksamkeit der elektrischen Kräfte hinter uns werfen müssen, ehe wir in ihre Pforten eintreten.

Noch einmal die Molekularkräfte.

7. Um philosophische Spekulation und naturwissenschaftliches Denken nach allen Richtungen in der gebührenden Weise auseinanderzuhalten, sei noch bemerkt, dass aus den Erfolgen, welche die Maxwell'sche Theorie in der neuesten Zeit errungen hat, wieder umgekehrt in keiner Weise ein Schluss gezogen werden kann, ob die Wirkung je zweier benachbarter Moleküle auch nur bei unmittelbarer Berührung eintritt, oder ob es Kräfte giebt, die in molekulare Distanzen fernewirken. Bloss die direkte Fernwirkung in Distanzen, die gross gegenüber den Molekularentfernungen sind, wird für magnetische und elektrische Kräfte und daher wohl auch für die Gravitation unwahrscheinlich gemacht.

Wir betrachten den Galvanismus vor der Reibungselektricität.

8. Schon lange bevor Galvani das erste Mal Zuckungen eines Froschschenkels durch Elektricität bemerkt hatte, war eine grosse Zahl von Phänomenen aus dem Gebiete der sogenannten Reibungselektricität bekannt. Es erscheint uns daher beim Entwurfe einer Theorie ebenfalls am natürlichsten, von der Reibungselektricität auszugehen; aber es ist kaum zu leugnen, dass dieser Grund doch ein mehr äusserlicher ist; jedenfalls kann auch der Versuch unternommen werden, den umgekehrten Weg einzuschlagen, wie es sogar schon bei Experimental-Vorlesungen über Elektricität und Magnetismus besonders für Elektrotechniker, denen die Reibungselektricität ferner steht, versucht worden ist.

9. Wir setzen also voraus, dass wir noch nicht die mindeste Kenntniss irgend einer magnetischen oder elektrischen Erscheinung haben, am allerwenigsten etwas von einem elektrischen oder magnetischen Fluidum wissen. Da machen wir die Erfahrung, dass ein Metalldraht durch verschiedenartige Ursachen in einen eigenthümlichen auffallenden Zustand versetzt werden kann, welcher sich dadurch äussert, dass im Drahte fortwährende Wärmeproduktion stattfindet, die sich bis zum Selbstleuchten desselben steigern kann; dass er Eisenfeile festzuhalten, wenn er zerschnitten und beide Schnittflächen gleichzeitig mit unserem Körper in Berührung gebracht werden, die Nerven zu erregen vermag und vieles Andere. Wir sagen dann, in dem Drahte fliesse ein elektrischer Strom; ein Ausdruck, der aber selbstverständlich rein bildlich zu nehmen ist, da wir nicht im Mindesten an ein wirkliches Fortströmen von etwas Materiellem denken wollen.

1. Erfahrungssatz. (Existenz el. Ströme.)

1. Hypothese. Mechanische Natur elektr. Ströme.

10. Nur die eine Hypothese machen wir, dass irgend eine Bewegung, über deren Natur wir uns aber jeder weiteren Aussage enthalten, die Ursache dieser eigenthümlichen Erscheinung sei. Diese Bewegung, von der wir voraussetzen, dass sie den allgemeinen Gleichungen der Mechanik gehorcht, kann theilweise im Innern des stromführenden Drahtes ihren Sitz haben, theilweise muss sie sich aber auch auf das umgebende Medium (Aether, andere Körper) erstrecken, weil sonst eine scheinbare, durch das Medium übertragene Fernwirkung nicht denkbar wäre.

---

2. Erfahrungssatz (el. Ströme sind stationär).

11. Wo in einem Systeme von Körpern eine Bewegung stattfindet, verändert sich in der Regel die räumliche Lage oder auch sonst der Zustand dieser Körper fortwährend. Hier ist dies jedoch nicht der Fall oder braucht wenigstens nicht der Fall zu sein. Drähte können Stunden, ja Tage lang von einem vollkommen unveränderlichen Strome durchflossen werden; die Lage, der Temperaturzustand, der Wärmefluss, der magnetische Zustand etwa in der Nähe befindlicher Eisenmassen, kurz alles für unsere Sinne Con-

statirbare bleibt dabei an jedem Punkte des Raumes vollkommen unverändert.[1])

Es muss also die Bewegung, die wir uns als Ursache der beschriebenen Erscheinung denken, eine vollkommen stationäre sein, dergestalt, dass jedesmal, sobald ein Theilchen seinen Ort verlässt, immer nach verschwindend kurzer Zeit wieder ein genau gleich beschaffenes, mit derselben Geschwindigkeit nach derselben Richtung bewegtes Theilchen an dessen Stelle tritt, so dass trotz der fortwährenden Bewegung an keinem Punkte des Raumes eine Veränderung wahrnehmbar ist.

12. Eine solche Bewegung nennt Helmholtz eine cyklische. Wenn alle in einem Systeme von Körpern stattfindenden Bewegungen cyklische sind, so nennt Helmholtz ein solches System ein cyklisches, oder kurz ein Cykel. *Cykeln.*

Als Beispiele derartiger Systeme seien hier angeführt: Ein fester Rotationskörper, der mit constanter Geschwindigkeit um seine Umdrehungsaxe rotirt; mehrere derartige Rotationskörper, die durch Treibriemen gekoppelt sind; eine Flüssigkeit, welche stationär einen in sich zurücklaufenden Kanal durchströmt.

13. Räder mit Speichen oder Zähnen entsprechen unserer Definition nicht vollkommen, können aber doch als „unechte Cykeln“ bezeichnet werden, insofern die Abweichungen nur unwesentliche Dinge betreffen; ja selbst Maschinen, bei denen wie beim Kolben der Dampfmaschine hin- und hergehende, aber doch in kurzen Zeiträumen periodisch sich wiederholende Bewegungen vorkommen, dürften kaum ein von den Cykeln wesentlich abweichendes Verhalten zeigen. *Unechte Cykeln; deren Bedeutung in der Technik.*

Es wird daher wohl auch die noch wenig behandelte

---

[1]) Dort, wo die Entstehungsursache ihren Sitz hat, müssen freilich (mit Ausnahme der Molekularströme in permanenten Magneten) Veränderungen vor sich gehen; allein diese können so weit entfernt sein, dass sie auf den betrachteten Theil des Feldes keinen anderen Einfluss haben, als dass sie den Strom treiben; zudem können sie auch zu den später zu besprechenden langsamen Veränderungen gehören.

Mechanik der Cykeln in der praktischen Maschinenlehre von Nutzen sein. Hier aber haben wir es mit einer ganz anderen, rein theoretischen Anwendung derselben zu thun.

Allgemeine Coordinaten.

14. Ehe ich speciell auf die Mechanik der Cykeln eingehe, muss ich einige Bemerkungen über die Bewegungsgleichungen ganz beliebiger mechanischer Systeme vorausschicken. Sei ein derartiges beliebiges System von Körpern gegeben; die Lage und der Zustand aller Körper des Systems sei durch n independente Variable l_1, l_2, ... l_n vollkommen bestimmt. Man sagte dann, das System habe n-Freiheitsgrade und bezeichnet die l als die allgemeinen Coordinaten des Systems.

So hat ein materieller Punkt einen Freiheitsgrad, wenn er ausschliesslich auf einer Linie, drei, wenn er frei im Raume beweglich ist, ein beliebig im Raume beweglicher fester Körper hat sechs Freiheitsgrade u. s. f.

Allgemeine Kräfte.

15. Wir wollen mit L die Kraft bezeichnen, welche irgend eine der Coordinaten l zu vergrössern strebt, so dass die gesammte Arbeit, welche geleistet wird, wenn jedes l um δl wächst und welche gleich dem Zuwachse δT der lebendigen Kraft T des Systemes ist, den Werth hat:

1) $$\delta A = \Sigma L \, \delta l.$$

Im Allgemeinen lassen sich alle Massen des Systems irgendwie mit n auf vorgeschriebenen Curven beweglichen Antriebspunkten so verbinden, dass die alleinige Bewegung je eines dieser Antriebspunkte immer der alleinigen Veränderung je einer einzigen Variablen entspricht und δl gleich dem Wege des betreffenden Antriebspunktes ist.

So können bei einem frei beweglichen materiellen Punkt dessen Projektionen auf die drei Coordinatenaxen als Antriebspunkte gewählt werden. Drei den Coordinatenebenen immer parallel bleibende Ebenen sind gezwungen, durch die drei Antriebspunkte zu gehen, der materielle Punkt selbst in jeder der drei Ebenen zu liegen. Bei einem um eine feste Axe drehbaren festen Körper ist ein Punkt des-

selben in der Entfernung eins von der Axe Antriebspunkt u. s. w.

Sollte unsere mangelhafte Kenntniss von dem Mechanismus des Systems dies nicht gestatten (wenn z. B. das System ein galvanisches Element enthielte und l die Elektricitätsmenge vorstellte, welche dasselbe seit dem Zeitanfange passirt hat), so ist der Begriff L gleich „Kraft, welche die Coordinate l zu vergrössern sucht", einfach als der Quotient $\delta A : \delta l$ zu definiren, worin δA die Arbeit darstellt, welche bei alleinigem Wachsthume der Coordinate l um δl geleistet wird. Da die Arbeit immer etwas bestimmt definirbares ist, so kann diese Definition niemals eine Zweideutigkeit involviren.

16. Setzen wir voraus, dass wir es auch in diesem Falle mit mechanischen Systemen zu thun haben, welche sich den allgemeinen Gleichungen der analytischen Mechanik fügen, so können wir noch immer trotz unserer Unbekanntschaft mit dem eigentlichen Mechanismus des Systems diese allgemeinen Gleichungen anwenden, welche Lagrange in die Form gebracht hat: *Lagrange's Bewegungsgleichungen.*

2) $$L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'} - \frac{\partial T}{\partial l},$$

wobei T als Funktion der n Coordinaten l und deren Differentialquotienten l' nach der Zeit t ausgedrückt zu denken ist.

$\partial T : \partial l'$ sind die Grössen, welche man die Momente zu nennen pflegt; wir wollen sie kurz mit λ bezeichnen, dem natürlich dann der Index der betreffenden Coordinate beizufügen ist.

Bezüglich des Beweises der Gleichungen 2 verweise ich auf: Lagrange, Mech. analyt., 2. Theil, 4. Section; Thomson und Tait, Treat. on nat. phil. Vol. 1, part. 2. New ed. sect. 318, Gl. 24; dass. deutsch S. 282, Gl. 15; Maxwell, Treat. on Electr. Vol. 2, 2. ed., sect. 571; Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, 8. Vorlesung, das auf Gleichung 7 folgende.

Hier will ich bloss ihre physikalische Bedeutung,

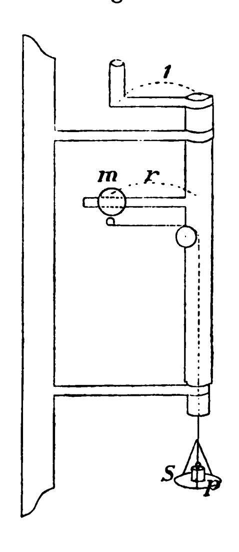
deren möglichst anschauliche Auffassung mir die Hauptsache ist, an einem speciellen Beispiele erläutern, das uns übrigens in der Folge von Nutzen sein wird.

Zweite Vorlesung.

Mechanische Analogie des zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre.

Beispiel. 17. Sei eine cylindrische Röhre (Fig. 1) mittelst einer Kurbel um ihre vertikal stehende Axe drehbar; dieselbe trage eine auf ihrer Axe senkrechte Stange, auf welcher eine Masse m von sehr kleinem Volumen verschiebbar ist. Von einem an der Masse befestigten Haken führe eine Schnur nach der Axe, und dann über eine passend angebrachte Rolle mit der Axe zusammenfallend nach einer Schale S, auf welche ein Gewicht p aufgelegt werden kann. Alles sei reibungslos und bis auf die Masse m auch massenlos. Als allgemeine Coordinaten sollen die Entfernung r der Masse von der Axe und der Winkel l benutzt werden, um den das Rohr gegen eine gewisse Normallage verdreht erscheint. Setzen wir der Kürze halber die Winkelgeschwindigkeit $l' = w$, so ist:

Fig. 1.



$$T = \frac{mr'^2}{2} + \frac{mr^2w^2}{2}$$
$$R = mr'' - mrw^2$$
$$L = mr^2w' + 2mrr'w.$$

Befindet sich der Kurbelgriff in der Entfernung 1 von der Axe, so kann man sich die Kraft L, welche den Winkel zu vergrössern sucht, direkt an der Kurbel in tangentieller Richtung wirkend denken. Die Kraft R sucht die Entfernung r zu vergrössern.

18. Sei nun zu Anfang $L = o$ und p halte der Centrifugalkraft genau das Gleichgewicht, so dass man also hat: *Mechanische Analogie des zweiten Hauptsatzes.*

$$w' = r' = o, \; p = mrw^2.$$

Hierauf wirke eine Aussenkraft L auf die Kurbel, dieselbe sei jedoch so schwach, dass w' immer sehr klein bleibt, während w einen grossen Werth hat. Durch passende Veränderung von p kann bewirkt werden, dass sich r beliebig ändert. Dies soll so geschehen, dass auch r' immer sehr klein gegenüber rw und daher auch r'' gegenüber rw^2 bleibt; dann ist immer mit grosser Annäherung:

$$p = -R = mrw^2$$
$$2T = mr^2w^2.$$

Die während der Zeit dt in das System durch die Aussenkraft L hineingesteckte Arbeit dQ wird theils auf Erhöhung der lebendigen Kraft $mr^2w^2 : 2$ des Systems, theils auf Hebung des Gewichtes p um das Stück dr verwendet. Es ist also

3) $$dQ = \frac{m}{2} d(r^2w^2) + pdr = mr^2wdw + 2mw^2rdr,$$

also:

4) $$\frac{dQ}{T} = d \operatorname{lognat}(r^4w^2),$$

also gleich einem vollständigen Differentiale.

19. Wir können wie bei einem bekannten, mit der Centrifugalmaschine ausgeführten Schulexperimente diesen Mechanismus zur Arbeitsleistung benutzen. Wir denken uns zwei horizontale, vollkommen ebene und glatte Tischplatten; die ebenfalls eben gedachte Schale S stehe anfangs im Niveau der unteren Tischplatte und es werde ohne Arbeitsleistung ein Gewicht p von der Platte auf die Schale geschoben. Dann werde die Rotationsgeschwindigkeit durch Handhabung der Kurbel gesteigert, bis das Gewicht auf das Niveau der oberen Tischplatte gehoben ist, auf welche *Kreisprocesse.*

es dann ohne Arbeitsleistung geschoben werden kann. Bei genügender Verminderung der Rotationsgeschwindigkeit sinkt dann die leere Schale wieder zum Niveau der unteren Tischplatte herab und es kann ein zweites Gewicht in derselben Weise gehoben werden u. s. f.

Man sieht, wie die dem Systeme zugeführte lebendige Kraft zur Arbeitsleistung benutzt werden kann. Allein in der soeben geschilderten Weise würde durch eine gegebene Zufuhr von lebendiger Kraft nicht das Maximum von Arbeit geleistet werden. Ein Maximum von Arbeitsleistung erhalten wir aber, wenn wir einen aus vier Theilprocessen bestehenden Kreisprocess in folgender Weise ausführen:

Erster Theilprocess.

20. Wir stecken durch andauernde Wirksamkeit einer kleinen Kraft L die Arbeit Q_1 in das System. Um diese in der vortheilhaftesten Weise auszunützen, wollen wir dabei von der Schale fortwährend sehr kleine Gewichte wegnehmen und so das Gewicht p fortwährend so abgleichen, dass es immer bis auf verschwindend Kleines gleich der Centrifugalkraft $-R$ ist. Der Ueberschuss der Centrifugalkraft über p und die Grösse von L soll dabei fortwährend so regulirt werden, dass die Schale in solchem Tempo steigt, dass die Hebungsarbeit immer genau gleich der hineingesteckten Arbeit ist, also die lebendige Kraft des Systems constant gleich T bleibt.

Zweiter Theilprocess.

21. Nun führen wir keine lebendige Kraft mehr zu, lassen aber die Schale noch fortwährend steigen, was durch sehr langsame Verminderung ihrer Belastung zu bewirken ist. Diese ist wieder so zu reguliren, dass p immer nur unendlich wenig hinter der Centrifugalkraft zurückbleibt. Da noch fortwährend Arbeit geleistet, aber keine mehr zugeführt wird, so muss dies auf Kosten der im Systeme enthaltenen lebendigen Kraft geschehen. Diese muss daher abnehmen und

$$p = 2T : r$$

muss, gleiche Zunahme von r vorausgesetzt, rascher wie früher abnehmen, da jetzt sowohl T abnimmt als auch r zunimmt. Dieser zweite Theilprocess soll fortgesetzt werden,

bis die lebendige Kraft des Systems auf den Wert T_o gesunken ist.

Dritter Theilprocess.

22. Durch Hemmung der Kurbel mittelst einer sehr geringen Kraft soll nun dem Systeme Arbeit entzogen werden. Dabei soll die Grösse der hemmenden Kraft und der Ueberschuss des Gewichtes p über die Centrifugalkraft (letzterer durch stetes Auflegen kleiner Gewichte) immer so regulirt werden, dass erstens beide unendlich klein bleiben und zweitens die Schale sich in solchem Tempo senkt, dass die hierdurch gewonnene Arbeit die lebendige Kraft des Systems constant erhält. Wir haben also für diesen dritten Theilprocess wieder $2T = mr^2w^2 = 2T_o =$ const. Wie lange dieser dritte Theilprocess fortzusetzen ist, finden wir am leichtesten in folgender Weise: Wir construiren auf dem Papiere eine Abscissenaxe OR, und eine Ordinatenaxe OW. Auf der ersteren tragen wir die Werthe des r, auf der letzteren die des w auf. Der Zustand des Systems, von welchem wir im ersten Theilprocesse ausgingen, ist dann durch einen bestimmten Punkt, etwa P, dargestellt; der ganze erste Process durch ein Stück einer von P ausgehenden gleichseitigen Hyperbel; der zweite Process durch ein Stück einer Curve, deren Gleichung $r^2w =$ const. ist, die sich also rascher als die gleichseitige Hyperbel asymptotisch der Abscissenaxe nähert. Der dritte Process ist wieder durch ein Stück einer gleichseitigen Hyperbel dargestellt. Wir ziehen nun durch P eine Curve mit der Gleichung $r^2w =$ const.; wo selbe die zuletzt erwähnte gleichseitige Hyperbel trifft, hat der dritte Theilprocess zu enden.

Der gesammte Arbeitsbetrag, der dem Systeme während desselben entzogen wurde, sei Q_o.

Vierter Theilprocess.

23. Nun wirke auf die Kurbel, wie beim zweiten Theilprocesse, keine Kraft; die Schale sinke langsam weiter und die lebendige Kraft nehme zu, bis der Ausgangszustand des Systems, also der Punkt P, wieder erreicht ist. Folgendes Schema giebt eine Uebersicht über den gesammten Process:

Nr. des Theilproc.	dessen charakt. Gleichung	zugeführte Arbeit	$T = \frac{mr^2w^2}{2}$	r	$p = \frac{2T}{r}$
1.	$r^2w^2 = \text{const.}$	Q_1	const. $= T_1$	nimmt zu	nimmt ab
2.	$r^3w = \text{const.}$	Null	nimmt ab	nimmt zu	n. bei gleichem Wachsth. von r rascher ab
3.	$r^2w^2 = \text{const.}$	$-Q_o$	const. $= T_o$	nimmt ab	nimmt zu
4.	$r^2w = \text{const.}$	Null	nimmt zu	nimmt ab	nimmt rascher zu.

Berechnung der geleisteten Arbeit.

24. Während aller vier Processe zusammen wurden theils Gewichte gehoben, theils wieder gesenkt; da aber der erstere Vorgang durchschnittlich bei grösserer Centrifugalkraft vor sich ging als der letztere, so wurden im Ganzen mehr Gewichte gehoben als gesenkt, daher Arbeit geleistet. Die im Ganzen geleistete Arbeit ist, da wir es mit einem Kreisprocesse zu thun haben, $Q_1 - Q_o$. Nun sahen wir aber, dass $dQ : T$ ein vollständiges Differential ist, integriren wir dieses über alle vier Theilprocesse, so ergiebt sich:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_o}{T_o} = \frac{Q_1 - Q_o}{T_1 - T_o}.$$

Wir brauchen nur statt r zu sagen „Volum", statt p „Druck", statt T „Temperatur", statt Q „zugeführte Wärme", so haben wir den Carnot'schen Process.

Nicht umkehrbare Kreisprocesse.

25. Die Analogie geht natürlich noch weiter. Es wird z. B. niemals exakt $p = mrw^2$ sein können, da ja sonst die Wagschale niemals in Bewegung kommen könnte, vielmehr muss, wenn r zunehmen soll, p kleiner, wenn es abnehmen soll, grösser als die Centrifugalkraft sein. Setzen wir daher

$$p = mrw^2 - \varepsilon,$$

so muss ε immer mit dr gleich bezeichnet sein. Man erhält also genauer an Stelle der Formeln 3 und 4 die folgende

$$\frac{dQ}{T} = d \log \text{nat} (r^4w^2) - \frac{\varepsilon dr}{T}.$$

Da nun sowohl T als auch das Produkt εdr immer positiv



ist, so liefert $dQ : T$ über einen geschlossenen Prozess integrirt allezeit etwas Negatives.

Freilich würde sich das hier geschilderte System nur mit einem Gase decken, für welches das Verhältniss der Wärmecapacitäten gleich 3 wäre, was einträte, wenn sich die Moleküle desselben statt im Raume nur in einer Geraden bewegen würden, an deren beiden Enden die Druckkraft p wirkte; auch würde die Labilität des Gleichgewichtes stören, was aber durch Gebrauch von Federspannungen an Stelle des hier der Einfachheit halber angewandten Zuges von Gewichten vermieden werden könnte. Ich kann selbstverständlich hierauf nicht weiter eingehen und muss auf die zahlreichen einschlägigen Arbeiten von Rankine, Helmholtz, Clausius, mir und Anderen verweisen, welche ziemlich vollständig zusammengestellt sind in meiner Abhandlung Gött. Nachrichten vom 24. April 1886. Vgl. auch Kronecker's Journal Bd. 98 S. 68 und Bd. 100 S. 201.

Die Theorien sind blosse Bilder der Naturprocesse.

26. Diese Digression geschah übrigens nicht bloss in der Absicht, die allgemeinen Lagrange'schen Gleichungen an einem Beispiele zu erläutern, sondern sie sollte auch noch das Wesen der Theorien, mit denen wir uns jetzt beschäftigen, überhaupt klar legen.

Diese Theorien beanspruchen keineswegs von Hypothesen auszugehen, welche sich mit der wahren Beschaffenheit der die Natur aufbauenden Urelemente und Urkräfte vollkommen decken, sondern bloss von Mechanismen, deren Wirkung mit dem Spiele der Naturerscheinungen in der einen oder anderen Beziehung eine grosse Analogie haben. Je umfassender und schlagender diese Analogie, desto brauchbarer natürlich auch der betreffende Mechanismus. In diesem Sinne ist der Ausdruck Maxwell's dynamical illustration [1]) zu verstehen.

Verzichten wir daher auch einerseits auf Constructionen, die sich vollkommen mit der Natur decken, so haben wir

---

[1]) Maxwell, *A dynamical theorie of the electromagnetic field.* Scient. pap. vol. I, pag. 537. Roy. Soc. tr. vol. 55. 1865.

andererseits wieder den Vortheil, mit klar definirten mechanischen Systemen zu operiren, deren Gebrauch namentlich von grossem heuristischen Werthe ist, wie gerade die Maxwell'sche Elektricitätstheorie beweist. Die Mechanismen werden in späteren Zeiten wohl durch brauchbarere ersetzt werden, aber das durch sie zur Anschauung gebrachte Allgemeine, ihnen und den Naturvorgängen Gemeinsame wird auch in jeder späteren Theorie bestehen bleiben.

Beim Lichte betrachtet ist unser Standpunkt vielleicht nicht einmal so wesentlich von dem der alten Theorien verschieden. Ein aus elastischen Kugeln zusammengesetztes Gas, ein sechseckiger oder tetraedrischer Benzolkern sind doch wohl auch mechanische Analogien, dynamische Illustrationen. Der Unterschied besteht vielleicht nur darin, dass wir uns des sinnbildlichen Charakters unserer Theorie klarer bewusst sind.

Dritte Vorlesung.

Bewegungsgleichungen für Cykeln; Beispiele.

[Sp]eciali[sier]ung der [Glei]chungen 2.

27. Wir wollen jetzt nachsehen, wie sich die allgemeinen Gleichungen 2 modificiren, wenn wir speciell voraussetzen, dass das betrachtete System ein cyklisches sei. Das Charakteristische jeder cyklischen Bewegung besteht darin, dass an Stelle jedes Theilchens, das seinen Ort verlässt, sogleich ein gleichbeschaffenes, gleichbewegtes tritt, so dass sich der Zustand des Systems während der Bewegung in keiner Weise verändert.

[Cy]klische [Coor]dinaten.

28. Wir bezeichnen l als eine cyklische Coordinate, wenn deren Veränderung eine derartige cyklische Bewegung darstellt; wenn also während der Veränderung von l der ganze Zustand des Systems, daher auch jedenfalls die in demselben enthaltene lebendige Kraft keinerlei Aenderung erleidet. Daraus ist zu schliessen, dass, wenn l eine cyklische Coordinate ist, der Werth von T nicht Funktion von

l sein darf; wohl aber kann und wird er im Allgemeinen l' enthalten, da ja die lebendige Kraft um so grösser sein wird, je rascher die cyklische Bewegung vor sich geht.

Der Zustand eines Cykels kann im Allgemeinen durch eine beliebige Anzahl solcher cyklischer Coordinaten bestimmt sein. Wären sonst gar keine Coordinaten vorhanden, so könnte der Zustand des Systems überhaupt gar nicht in einen anderen übergehen, da er sich bei keiner Veränderung irgend einer cyklischen Coordinate verändern darf.

Langsam veränderliche Coordinaten.

29. Ausser den cyklischen Coordinaten soll also der Zustand des Systems noch durch andere bestimmt sein, welche Helmholtz die langsam veränderlichen Coordinaten oder kurz die Parameter nennt, da sie eine Aehnlichkeit mit den bei der Methode der Variation der Constanten, bei Aufsuchung der einhüllenden etc. vorkommenden veränderlichen Parametern haben. Diese Parameter haben nicht die Eigenschaft der cyklischen Coordinaten, dafür aber sollen sie sich so ausserordentlich langsam verändern, dass ihre Differentialquotienten nach der Zeit vernachlässigt werden können; dass also, wenn man diese Parameter mit k bezeichnet, die lebendige Kraft zwar die k selbst, aber nicht deren Ableitungen nach der Zeit k' enthält.

Der Zustand ist Funktion von k und l'.

30. Man kann daher schreiben:

5) $$T = f(k, l').$$

Es ist eine weitere Folge der langsamen Veränderlichkeit der k, dass während eines längeren Zeitraumes die k als constant betrachtet werden können, so dass während dieses Zeitraumes die Bewegung als eine cyklische betrachtet werden darf; erst nach längerer Zeit nehmen die k allmählich andere Werthe an, so dass die Bewegung jetzt wieder eine cyklische ist, aber mit etwas veränderten Werthen der Parameter. Während also die l' gross sind, so sind die l'' klein von derselben Ordnung, wie die k'.

Als Erläuterung möge das in der vorigen Vorlesung behandelte Beispiel gelten. Da war l eine cyklische Coordinate, bei deren rascher Veränderung sich der Zustand des Systems nicht ändert; r dagegen wurde als langsam veränderlicher Parameter vorausgesetzt, so dass die Ge-

schwindigkeit r' verschwindet, aber die cyklische Rotationsbewegung des Systems bald bei kleineren, bald bei grösseren Distanzen der Masse m von der Drehungsaxe vor sich geht. T war Funktion von l' und r. In ganz analoger Weise denken wir uns, dass auch die Volumveränderungen warmer Körper sehr langsam gegenüber der Molekularbewegung, welche wir Wärme nennen, die sichtbaren Bewegungen der Stromleiter und Magnete sehr langsam gegenüber den Bewegungen, welche wir Elektricität nennen, vor sich gehen.

Bewegungsgleichungen für Cykeln.

31. Wir können jetzt ein Cykel auch definiren, als ein solches System, welches keine anderen als cyklische und langsam veränderliche Coordinaten enthält, und erhalten mit Rücksicht auf die Gleichung 5 aus unseren allgemeinen Bewegungsgleichungen 2 für Cykeln die nachfolgenden Bewegungsgleichungen:

$$6)\qquad K = -\frac{\partial T}{\partial k},\quad L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'},$$

worin K und L in oben definirtem Sinne die Kräfte sind, welche einestheils die langsam veränderlichen Coordinaten k, anderentheils die cyklischen Coordinaten l zu vergrössern streben.

Sind alle eingeführten Vernachlässigungen begründet?

32. Da bei der partiellen Differentiation die Grössenordnung der Glieder im Allgemeinen verändert wird, so können Zweifel entstehen, ob nicht hierbei Glieder von derselben Grössenordnung wie die Ausschlaggebenden vernachlässigt worden sind; daher scheinen die folgenden Betrachtungen zur Zerstreuung derartiger Zweifel nicht ganz überflüssig.

Wir nehmen an, die langsame Veränderlichkeit jedes der k soll dadurch ausdrückbar sein, dass wir $k = f(\varepsilon . t)$ setzen, wobei $f(x)$ eine sammt ihren Ableitungen endliche Funktion des endlichen Argumentes x, ε aber eine sehr kleine Grösse ist. In gleicher Weise soll die langsame Veränderlichkeit von l' dadurch ausdrückbar sein, dass $l' = g(\zeta . t)$ gesetzt wird, wobei g und ζ dieselben Eigenschaften wie f

und ε haben. Natürlich ist dann l selbst sehr gross, was aber nicht schadet, da l selbst in den Gleichungen nirgends vorkommt.

T ist eine homogene Funktion zweiten Grades von k' und l', deren Coëfficienten bloss Funktionen der k sind. Es soll Ak'^2 ein Glied repräsentiren, welches das Quadrat eines k' oder ein Produkt zweier k' enthält. In gleicher Weise sei Cl'^2 ein Glied, welches ebenso bezüglich l beschaffen ist, und endlich $Bk'l'$ ein Glied, welches ein Produkt eines k' und eines l' enthält. Die Coëfficienten A, B, C sind Funktionen der k und sollen endlich sein, sowie auch ihre partiellen Ableitungen nach diesen Grössen, welche wir symbolisch durch A', B'... ausdrücken. Der vollständige Ausdruck für K wäre:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{dk'} - \frac{\partial T}{dk}.$$

Wir bezeichnen den ersten Addenden dieses Ausdrucks mit I, den zweiten mit II. Solche Glieder, welche die Differentiation von:

$$Ak'^2,\ Bk'l' \text{ oder } Cl'^2$$

in I liefert, sollen mit I_a, I_b resp. I_c bezeichnet werden und analoge Bedeutungen sollen II_a, II_b, II_c haben.

Dann ist, wenn man Glieder von gleicher Grössenordnung der Kürze halber einfach einander gleichsetzt:

$$I_a = \frac{d(Ak')}{dt} = k'^2 A' + k'' A = \varepsilon^2,$$

wobei die letzte Gleichung lediglich ausdrücken soll, dass beide Glieder von der Grössenordnung ε^2 sind. Ebenso ergiebt sich

$$II_a = A'k'^2 = \varepsilon^2,$$
$$I_b = B'k'l' + Bl' = \varepsilon + \zeta,$$
$$II_b = B'k'l' = \varepsilon,\ I_c = o,$$

wogegen $II_c = C'l'^2$ endlich ist, welches Glied eben allein den in Gleichung 6 vorkommenden Werth für K liefert. Da das undifferentiirte l nirgends vorkommt, so ist

$$L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'}.$$

Die Glieder von der Form Ak'^2 liefern in diesen Ausdruck nichts, ein Glied von der Form $Bk'l'$ soll III_b, ein Glied

von der Form Cl'^2 aber III_c liefern, dann ist, wenn wieder das Gleichheitszeichen nur Gleichheit der Grössenordnung ausdrückt,

$$III_b = Bk'' + B'k'^2 = \varepsilon^2$$
$$III_c = C'k'l' + Cl'' = \varepsilon + \zeta.$$

Es ist also L unendlich klein, wie vorauszusehen war und alle anderen Glieder verschwinden unter allen Umständen gegenüber III_c, welches gerade auch die in Gleichung 6 aufgenommenen Glieder darstellt.

Die sowohl k' als l' enthaltenden Glieder würden zu ganz eigenthümlichen, bisher noch nicht entdeckten Erscheinungen Veranlassung geben, denen Maxwell in seinem Treat. on Electr. 2. Edit. Vol. 2, sect. 574, deutsch pag. 263, eine längere Betrachtung widmet.

Monocykeln. 33. Der einfachste Fall ist der, dass nur eine einzige cyklische Coordinate vorhanden ist. Es ist dann die Lage sämmtlicher Theile des Systems, abgesehen von den langsam veränderlichen Coordinaten, nur noch durch die Lage eines einzigen Antriebspunktes bestimmt, welche wiederum durch eine einzige cyklische Coordinate l definirt ist. Ruht der Angriffspunkt, so ruhen alle Theile des Systems; bewegt er sich mit einer gegebenen Geschwindigkeit l', so sind dadurch die Bewegungen aller Massen des Systems bestimmt. Natürlich sind dabei immer die Werthe der langsam veränderlichen Parameter als gegeben vorausgesetzt, welche ja stets während einer langdauernden Bewegung des Systems als constant betrachtet werden können.

Das System, welches wir betrachten, kann dabei aus beliebig vielen beliebig miteinander und mit dem Antriebspunkte verbundenen Massentheilchen $m_1, m_2, \ldots . m_p$ bestehen. Wir sahen, dass die lebendige Kraft T des Systems nur Funktion von l' und den Parametern k sein kann. Behält jedes Massentheilchen während seiner ganzen Bewegung denselben Bewegungszustand, so werden auch die

Geschwindigkeiten v_1, $v_2 \ldots v_p$ der einzelnen Massentheilchen nur Funktionen von l' und k sein. Nimmt ein bestimmtes Massentheilchen, während es fortwandert, verschiedene Geschwindigkeiten an, so ist doch jedenfalls die Geschwindigkeit, die an einer bestimmten Stelle des Raumes herrscht, nur Funktion von l' und k, was bei Berechnung von T auf dasselbe herauskommt, da ja T eine über alle Massentheilchen zu erstreckende Summe ist.

Im Folgenden soll niemals in den Fällen, wo Parameter vermittelst gewisser Bedingungsgleichungen eliminirt werden könnten, z. B. vermittelst der Bedingung, dass auf sie niemals eine Kraft wirkt[1]), diese Elimination vorgenommen werden, sondern sämmtliche langsam veränderliche Parameter und auch die darauf wirkenden Kräfte sollen, selbst wenn letztere immer gleich 0 sind, in den Gleichungen belassen werden; dann sind Fälle kaum denkbar, wo die Geschwindigkeiten v, andere als lineare Funktionen der Geschwindigkeiten l' sind, was natürlich ebenso für die später zu betrachtenden Fälle gilt, wo mehrere cyklische Coordinaten vorhanden sind.

Es scheint, dass die Voraussetzung jeder anderen nicht linearen Abhängigkeit zu mechanischen Ungereimtheiten führen würde. Sollte aber später doch einmal die Möglichkeit von Bewegungen entdeckt werden, wobei die v nicht lineare Funktionen der l' sind, so setzen wir jedenfalls voraus, dass die Bewegungen, welche zu den magnetischen und elektrischen Erscheinungen Veranlassung geben, nicht in diese noch ganz hypothetische Kategorie von Bewegungen gehören. Mit einem Worte, wir setzen: *2. Hypothese: Die v sind lineare Funktionen der l'.*

$$v_i = a_i l', \quad (i = 1, 2 \ldots p)$$

$$T = \frac{l'^2}{2} \sum_{i=1}^{i=p} m_i a_i^2 = \frac{A}{2} l'^2,$$

wobei die Coëfficienten a selbstverständlich Funktionen der langsam veränderlichen Parameter k sind. Die Gleichung 6 liefert dann:

[1]) v. Helmholtz, Principien der Statik monocyklischer Systeme. Kroneker's Journal Bd. 97 S. 132.

$$7)\qquad L = \frac{d(Al')}{dt},\quad K_h = -\frac{l'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial k_h}\quad (h = 1, 2 \ldots n).$$

Beispiele von Monocykeln.

34. Um sich die wahre Bedeutung dieser Gleichungen möglichst zu veranschaulichen, empfehle ich die Anwendung auf Beispiele und deute hier nur einige Verallgemeinerungen des in der zweiten Vorlesung gegebenen Beispieles kurz an.

Die an dem rotirenden Rohre befestigte Seitenstange der Fig. 1 Art. 17, (AC in Fig. 2) sei nicht fest, sondern durch ein Gelenk A mit dem Rohre verbunden. Aehnlich sei eine zweite gleich lange Stange CE durch ein Gelenk E mit einer in der Axe der Röhre verschiebbaren dritten Stange verbunden. Die beiden anderen Enden der ersten und zweiten Stange endlich seien wieder durch ein Gelenk C mit einander verbunden (s. Fig. 2).

Fig. 2.

Von der dritten Stange rage das Stück y aus dem Rohre hervor. Auf der ersten Stange gleite die Masse m, durch einen Faden wie in Fig. 1 gehalten, von dem ein Stück x aus dem Rohre herausragt. Hier ist wieder die Kurbel der Antriebspunkt. Die Winkeldrehung, oder, wenn man will, der Weg l der Kurbel, ist die cyklische Coordinate, x, y sind die Parameter. Wir setzen voraus, dass die fixen Bestandtheile ein Trägheitsmoment J haben, während das des Fadens und der beweglichen Stangen verschwindet, sowie dass sich die Parameter x, y genügend langsam ändern. Dann ist:

$$T = \frac{l'^2}{2}\left(J + mr^2\right),\quad L = \frac{d}{dt}\left[(J + mr^2)l'\right],\ \text{da } A = J + mr^2 \text{ ist.}$$

Die Kräfte, welche den Faden und die Stange aus der Röhre herauszuziehen suchen, sind:

$$X = -mrl'^2\frac{\partial r}{\partial x},\; Y = -mrl'^2\frac{\partial r}{dy}.$$

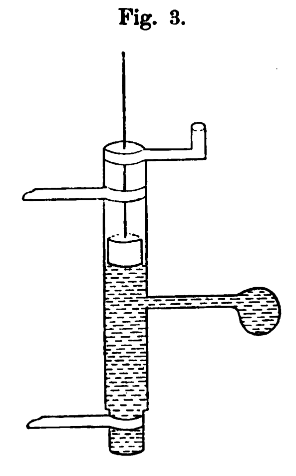
Bildet die erste und zweite Stange den Winkel 2α, so ist $\partial r : \partial x = -\cos\alpha$. Verschiebt sich das an die dritte Stange stossende Ende E der zweiten Stange um $EE' = \partial y$, so verschiebt sich die Projection D ihres anderen Endes C auf die Axe um $DD' = \partial y : 2$, der Punkt C um $CC' = \partial y : 2\cos\alpha$; der Mittelpunkt B der Masse M um $BB' = CC'.(\lambda - x) : \lambda = (\lambda - x)\,\partial y : 2\lambda\cos\alpha$, und die Entfernung r der Masse m von der Stange wächst um $\delta r = -BB'\sin\alpha = -(\lambda - x)\,tg\,\alpha\,\partial y : 2\lambda$, wobei λ die Länge der ersten Stange ist, welche ebensogross wie die der zweiten Stange sein soll. Der Faden soll eine solche Gesammtlänge haben, dass sich für $x = o$ die Masse m in C befindet.

Da ausserdem $r = (\lambda - x)\cos\alpha$ ist, so erhält man:

$$X = ml'^2(\lambda - x)\cos^2\alpha,\; Y = \frac{ml'^2}{2\lambda}(\lambda - x)^2\sin\alpha.$$

Um noch einen Fall zu betrachten, wo auch m veränderlich ist, communicire mit der vertikalen Röhre eine enge horizontale Röhre, und diese am Ende mit einem schlaffen Ballon. Die vertikale Röhre sei unten zu, oben mit einem verschiebbaren Kolben vom Flächeninhalte f verschlossen, dessen Stiel um das Stück x aus ihr hervorragt. Sie wie die horizontale Röhre und der Ballon seien mit einer incompressiblen Flüssigkeit von der Dichte ϱ gefüllt. (Siehe Fig. 3.) Dann ist $\partial m = -\varrho f \partial x$, daher die Kraft X, welche x zu vergrössern strebt:

Fig. 3.



$$X = -\frac{r^2l'^2}{2}\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\varrho f r^2 l'^2}{2}.$$

Ein elektrischer Strom ist ein Monocykel.

35. Eine derartige monocyklische Bewegung, deren Intensität durch die Ableitung einer einzigen Variablen nach der Zeit vollkommen bestimmt ist, ist nach Maxwell ein in einem Drahte cirkulirender elektrischer Strom. l' misst die Geschwindigkeit der Bewegung, wird also jedenfalls mit wachsender Stromintensität wachsen; L ist die Kraft, welche die monocyklische Bewegung antreibt, wächst also mit wachsender elektromotorischer Kraft. Die Bewegung findet theilweise im umgebenden Aether, möglicherweise auch in umgebenden Eisenmassen etc. statt. Diese Bewegung in der Umgebung ändert sich, wenn der Draht seine Gestalt, die umgebenden Eisenmassen etc. ihre Lage ändern und zwar sollen k die Parameter sein, welche die Gestalt, Lage des Drahtes, der Eisenmassen etc. bestimmen.

Die Geschwindigkeit eines jeden im Drahte oder in der Umgebung befindlichen ponderablen oder inponderablen Massentheilchens (resp. die Geschwindigkeit an einer bestimmten Stelle, durch welche Massentheilchen hindurchwandern), soll proportional l' sein. Der Proportionalitätsfaktor aber wird von der Gestalt des Drahtes und der Lage der umgebenden Körper, also von dem Werthe der Parameter k abhängen. Die K sind die Kräfte, welche von aussen auf das System wirken müssen, um die Werthe von l' und diesen Parametern constant, respektive gerade in der Weise langsam veränderlich zu machen, dass k' und l'' die in den Gleichungen angeführten Werthe haben.

K sind also die ponderomotorischen Kräfte, welche bei den in den Gleichungen enthaltenen Werthen von k' und l'' von aussen auf den stromführenden Draht und die umgebenden Körper wirken müssen, $-K$ die Kräfte, welche scheinbar durch die cyklische Bewegung (wie die Centrifugalkraft durch die Kreisbewegung) erzeugt und denen die Kräfte $+K$ (Centripetalkraft) das Gleichgewicht halten. Ebenso sind L die Kräfte, welche unter denselben Bedingungen von aussen wirken müssen.

Bewegungshindernisse.

36. Wir setzten bisher das System als frei von Bewegungshindernissen voraus. Damit es einem elektrischen

Strome vollkommen analog werde, müssen wir auch solche einführen.

Bewegungshindernisse, welche sich der Veränderung der k entgegenstellen würden, wären etwa Reibung der Drahtstücke der Stromleitung oder benachbarter Eisenkörper bei einer sichtbaren Bewegung derselben und Aehnliches, wären also in die K einzubeziehen. Solche dagegen, welche der cyklischen Bewegung entgegenwirken und deren Gesammtbetrag wir mit W bezeichnen wollen, müssen explicit in die Gleichungen eingeführt werden.

Sei L_o die Kraft, welche thätig sein musste, wenn die Bewegungshindernisse fehlten und welche also durch Gleichung 6 bestimmt ist, L_m aber die bei Thätigkeit der Bewegungshindernisse nothwendige Kraft; so ist:

$$L_m = L_o + W = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'} + W.$$

Wenn man daher wieder den Index m weglässt, so erhält man beim Vorhandensein der Bewegungshindernisse an Stelle der Gleichung 6 die folgende:

$$L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'} + W. \tag{8}$$

Bleibt die Stromintensität, die Gestalt des Drahtes und die Lage der umgebenden Massen, also l' und $\partial T : \partial l'$ constant, so ist daher $L = W$. Dann wird aber die elektromotorische Kraft durch das Ohm'sche Gesetz bestimmt.

Würden wir also voraussetzen, dass L einfach der elektromotorischen Kraft, l' der Stromstärke proportional ist, so müsste, um der Erfahrung zu genügen:

$$W = l' \times \text{const.}$$

gesetzt werden. Wir müssten also annehmen, dass die Gegenkraft der Bewegungshindernisse der Geschwindigkeit der Bewegung, also der Stromstärke proportional ist. Obige Annahme ist zwar die einfachste, über ihre Berechtigung kann aber nur durch Zuziehung weiterer Erfahrungsthatsachen entschieden werden, welche am passendsten der Wechselwirkung zweier elektrischer Ströme entnommen werden.

Vierte Vorlesung.

Bicykel. Absolute Strommessung.

Bicykeln. 37. Sei nun ein System gegeben, das aus beliebig vielen Massentheilchen $m_1, m_2 \ldots m_p$ mit den Geschwindigkeiten $v_1, v_2 \ldots v_p$ besteht. Die Position jedes Massentheilchens sei durch beliebig viele langsam veränderliche Parameter $k_1, k_2 \ldots k_n$ und durch zwei cyklische Coordinaten l_1, l_2 bestimmt, deren Ableitungen nach der Zeit wir mit l'_1 und l'_2 bezeichnen.

Es sei wieder:

9) $$v_i = a_i l'_1 + b_i l'_2, \ (i = 1, 2 \,..\, p)$$

(v_i bezeichnet eventuell die Geschwindigkeit an einer bestimmten Stelle des Raumes, wo fortwährend Massentheilchen m_i passiren). Setzt man daher:

10) $$A = \sum_{i=1}^{i=p} m_i a_i^2, \ B = \sum_{i=1}^{i=p} m_i b_i^2, \ C = \sum_{i=1}^{i=p} m_i a_i b_i,$$

so wird

11) $$T = \frac{A}{2} l'^2_1 + \frac{B}{2} l'^2_2 + C l'_1 l'_2.$$

Die Momente sind:

$$\lambda_1 = \frac{\partial T}{\partial l'} = A l'_1 + C l'_2, \ \lambda_2 = \frac{\partial T}{\partial l'_2} = C l'_1 + B l'_2,$$

und man erhält die Bewegungsgleichungen:

12) $$\begin{cases} L_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A l'_1 + C l'_2\right) + W_1 \\ L_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(C l'_1 + B l'_2\right) + W_2 \\ K = -\frac{\partial T}{\partial k} = -\frac{l'^2_1}{2}\frac{\partial A}{\partial k} - \frac{l'^2_2}{2}\frac{\partial B}{\partial k} - l'_1 l'_2 \frac{\partial C}{\partial k}. \end{cases}$$

Hier sind die L die Kräfte, welche die beiden cyklischen Coordinaten zu vergrössern suchen, K dagegen die Kräfte, welche irgend einen der Parameter k zu vergrössern streben. W_1 und W_2 aber ist der Gesammtbetrag der Bewegungshinder-

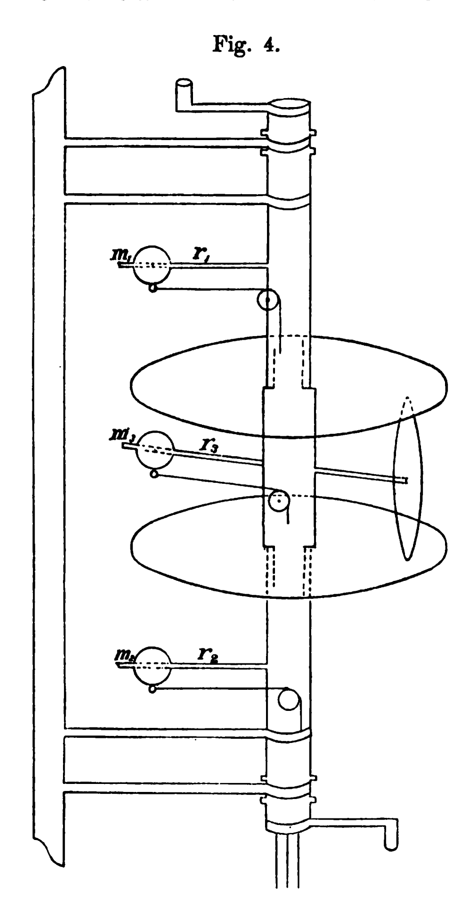
nisse, welche bei Veränderung der ersten, resp. der zweiten cyklischen Coordinate auftreten. Es wird vorausgesetzt, dass der Mechanismus, welcher die Bewegung von den Antriebspunkten auf die einzelnen Massen überträgt, ohne Bewegungshindernisse ist und nur die Bewegung der Antriebspunkte selbst solche erfährt, so dass W_1 bloss Funktion der Bewegung des ersten, W_2 des zweiten Antriebspunktes ist, nicht aber die Bewegung des ersten Antriebspunktes auch auf W_2 von Einfluss ist, oder umgekehrt.

38. Diese Gleichungen sind ganz allgemein. Wie immer die Massen beschaffen sein mögen, deren Bewegung uns als elektrischer Strom erscheint, wie complicirt auch ihre Verbindungen seien, wie immer der Charakter dieser Bewegungen selbst gestaltet sein mag: wenn es nur cyklische sind, die den Grundprincipien der Mechanik gehorchen; jedes Mal müssen sie die obigen Gleichungen erfüllen, welche ja eine unmittelbare Consequenz jener Grundprincipien sind. Doch um uns den physikalischen Sinn dieser Gleichungen möglichst zu veranschaulichen, wollen wir zunächst ihre Anwendung auf specielle Fälle zeigen. Wir könnten da Flüssigkeitsströme in in sich zurücklaufenden Kanälen, Prozesse, wo stete Verdampfung und Wiedercondensation, chemische Verbindungen und Dissociation, Elektrolyse etc. stattfindet, wählen. Doch wird es sich offenbar empfehlen, zuvörderst ein denkbar einfaches Beispiel zu betrachten. Zwei von einander unabhängige nebeneinanderstehende Apparate, jeder so beschaffen, wie der in Fig. 1, Art. 17 dargestellte, würden den Bedingungen, die wir jetzt aufstellten, genügen; allein da würden gerade die Glieder, welche das Zusammenwirken beider ausdrücken und auf die es uns jetzt am meisten ankommt, fehlen. Deshalb wollen wir das folgende ideale Modell betrachten. *Beispiele von Bicykeln.*

39. Drei coaxiale Röhren sollen übereinander stehen; passende Verjüngungen der mittleren sollen ein klein wenig in die oberste und unterste hineinragen und darin reibungslos drehbar sein, während die oberste und unterste so getragen werden, dass sie keiner anderen Bewegung als einer Drehung um ihre Axe fähig sind (vgl. *Idealer Mechanismus.*

Fig. 4). Jede der drei Röhren trage eine Masse, m_1 zu oberst, m_2 zu unterst, m_3 in der Mitte, welche genau wie die Masse der Fig. 1 Art. 17 beweglich und von einem Faden gezogen ist. Alle drei Fäden ragen aus der untersten Röhre hervor. Die Distanzen der Massen von der Axe seien r_1, r_2, r_3.

Fig. 4.



Die oberste und unterste Röhre sollen genau wie die Röhre der Fig. 1 durch eine Kurbel drehbar sein. Das mittlere Rohr aber soll mit ihnen in der folgenden Weise verbunden sein: Das oberste und unterste Rohr tragen je eine zu ihrer Axe senkrechte Scheibe, das mittlere aber eine zu seiner Axe senkrechte Stange, an welcher eine zur Stange senkrechte Scheibe drehbar befestigt ist, die die beiden anderen Scheiben berührt und darauf ohne Reibung und Gleitung rollt. Die Abhängigkeit der Bewegung des mittleren Rohres von den beiden anderen findet man leicht durch folgende Ueberlegung: Wenn das obere und untere Rohr beide um den gleichen Winkel im selben Sinne gedreht werden, so dreht sich dabei auch das mittlere Rohr im selben Sinne um den gleichen Winkel, die dritte Scheibe jedoch dreht sich dabei gar nicht. Wird dagegen das obere und untere

Rohr um den gleichen Winkel im engegengesetzten Sinne gedreht, so dreht sich die mittlere Scheibe, aber ihr Mittelpunkt und daher auch das mittlere Rohr bewegt sich nicht. Wird daher das obere Rohr um einen beliebigen Winkel l_1, das untere im gleichen Sinne um einen beliebigen anderen Winkel l_2 gedreht, so kann man sich die Sache immer so vorstellen, als ob zuerst beide Rohre im selben Sinne um den Winkel $(l_1 + l_2) : 2$, hernach aber das obere wieder im selben Sinne um den Winkel $(l_1 - l_2) : 2$, das untere dagegen im entgegengesetzten Sinne um denselben Winkel $(l_1 - l_2) : 2$ gedreht worden wäre. Nur der erstere Process dreht das mittlere Rohr und zwar um den Winkel $(l_1 + l_2) : 2$. Es ist also die Drehung und daher auch die Winkelgeschwindigkeit des mittleren Rohres immer das arithmetische Mittel aus der der beiden anderen.

Wird also alles Uebrige als massenlos vorausgesetzt, so besteht das System nur aus drei Massen m_1, m_2, m_3, und ist durch die beiden cyklischen Coordinaten l_1, l_2 und die drei langsam veränderlichen Parameter r_1, r_2, r_3 vollkommen bestimmt. Die Geschwindigkeiten der Massen sind: *Gleichungen für denselben.*

$$v_1 = r_1 l'_1, \; v_2 = r_2 l'_2, \; v_3 = \frac{r_3}{2} l'_1 + \frac{r_3}{2} l'_2.$$

Es ist also in Formel 9 und 10 zu setzen:

$$a_1 = r_1, \; a_2 = b_1 = o, \; b_2 = r_2, \; a_3 = b_3 = r_3 : 2,$$

was liefert:

$$A = m_1 r_1^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4}, \; B = m_2 r_2^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4}, \; C = \frac{m_3 r_3^2}{4},$$

oder wenn man noch behufs möglichster Vereinfachung der Formeln die oberste und unterste Masse untereinander gleich ($= m$), die mittlere aber vier Mal so gross annimmt:

$$A = m(r_1^2 + r_3^2), \; B = m(r_3^2 + r_2^2), \; C = m r_3^2.$$

Denken wir uns diese Werthe in die Formeln 12 eingesetzt, so erhalten wir also die Bewegungsgleichungen unseres Systems. W_1, W_2 sind die Kräfte, welche die Bewegungshindernisse der Drehung der obersten und untersten Röhre entgegensetzen (z. B. Reibung in den Lagern), während alle anderen Bewegungen als frei von Bewegungshindernissen vorausgesetzt werden.

Discussion. 40. Wir wollen zunächst der oberen Röhre mittelst der oberen Kurbel eine beliebige vorgeschriebene Bewegung ertheilt denken und uns fragen, welche Kraft L_2 dabei auf die untere Kurbel wirken muss, damit die untere Röhre stets in Ruhe bleibt. Da die untere Röhre sich nicht bewegt, so ist $l'_2 = o$; aber dieselbe kann offenbar, wenn sie ruht, auch keinen Widerstand erfahren, weshalb auch $W_2 = o$ und

$$L_2 = \frac{d}{dt}\left(Cl'_1\right)$$

ist. So lange daher die r unverändert bleiben und auch die Geschwindigkeit des ersten Rohres sich nicht ändert, wirkt auf die zweite Kurbel keine Kraft, wächst dagegen die Geschwindigkeit der ersten Röhre, so muss auf die zweite Kurbel, um sie ruhig zu erhalten, eine Kraft im gleichen Sinne wirken, deren Intensität proportional $dl'_1 : dt$ und proportional dem Coëfficienten C ist (inducirte elektromotorische Kraft). Fehlte jene Kraft, so würde sich die zweite Röhre, während des Wachsthums der Geschwindigkeit der ersten, im entgegengesetzten Sinne drehen (inducirte Drehung). Das Entgegengesetzte gilt, wenn die Geschwindigkeit der ersten Röhre abnimmt.

Einen gleichen Effekt hat aber bei constanter Drehungsgeschwindigkeit der ersten Röhre ein Anwachsen oder Abnehmen von C durch langsame Handhabung des r_3 regulirenden Fadens. Im ersten Fall tritt eine entgegengesetzte, im letzten eine gleichsinnige Drehung der unteren Röhre auf, beide sind proportional l'_1 und $dC : dt$.

Die Analogie mit zwei elektrischen Strömen ist eine vollständige. A ist der Selbstinductionscoëfficient der ersten, B der der zweiten, C der wechselseitige Inductionscoëfficient beider Strombahnen.

Die Analogie geht noch weiter. Gemäss der letzten der Gleichungen 12 wirken auch Kräfte auf die Parameter, von denen die Werthe von A, B, C abhängig sind (auf die Fäden). Die Intensität derselben ist für in A enthaltene Parameter l'^2_1, für in B enthaltene Parameter l'^2_2, für in C enthaltene aber dem Produkte $l'_1 l'_2$ proportional und

superponirt sich für solche Parameter, die in mehreren der Grössen A, B, C vorkommen. Wenn l'_1 und l'_2 gleichbezeichnet sind und C beim Wachsthum des Parameters wächst, so ist, um ihn constant zu erhalten, eine Aussenkraft nothwendig, die ihn zu verkleinern sucht.

3. Erfahrungssatz (besser Definition der Stromintensität).

41. Dasselbe gilt auch von zwei elektrischen Strömen. Wenn bei Aenderung irgend einer Coordinate sich der Selbstinductionscoëfficient des ersten resp. zweiten Stromkreises ändert, wirkt darauf eine dem Quadrate der Intensität des ersten, resp. des zweiten Stromes proportionale ponderomotorische Kraft; wenn aber der wechselseitige Inductionscoëfficient Funktion dieser Coordinate ist, so wirkt darauf eine dem Produkte beider Stromintensitäten proportionale Kraft; ändern sich endlich bei Veränderung der Coordinate mehrere dieser Coëfficienten gleichzeitig, so addiren sich auch die betreffenden Kräfte.

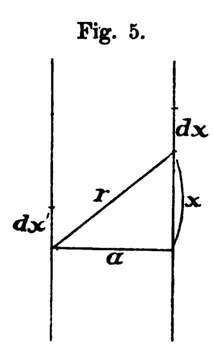
Wir genügen also nur dann der Erfahrung, wenn wir annehmen, dass die Stromintensitäten in der That den Geschwindigkeiten l' der Antriebspunkte proportional sind. Oder besser gesagt, wir definiren die Stromintensität so, dass die erstgenannten Kräfte ihren Quadraten, die letztgenannte aber ihrem Produkte proportional werden. Wir denken uns einen ein für alle Mal unveränderlichen Strom gegeben und in die Nähe einen beweglichen Stromleiter gebracht. Wollen wir die Intensität zweier anderer elektrischer Ströme mit einander vergleichen, so schicken wir durch jenen Stromleiter zuerst einen Strom von gleicher Intensität, wie der erste; dann einen Srom von gleicher Intensität wie der zweite. Das Verhältniss der ponderomotorischen Kräfte, die derselbe (natürlich immer die gleiche Gestalt und relative Lage zum ersten Strom vorausgesetzt) in dem einen und anderen Falle erfährt, giebt das gewünschte Verhältniss der Stromintensitäten. Dieses Verfahren fällt übrigens, wenn man permanente Magnete als Aggregate unveränderlicher Molekularströme auffasst, mit der Strommessung durch die Tangentenbussole zusammen. Vorausgesetzt ist dabei natürlich noch, dass man durch Elektrolyse oder eine andere Wirkung die Gleichheit des

Stromes im beweglichen Stromleiter mit je einem der zu messenden constatiren kann.

Absolute Messung der Stromintensität i'.

42. Wollen wir eine Einheit der Stromintensität definiren, so ist es bei unserem augenblicklichen Standpunkte nicht gut, von dem Begriffe eines permanenten Magnets auszugehen. Wir denken uns vielmehr zwei sehr lange parallele Ströme in der Entfernung a Fig. 5. Sei dx ein Element des einen, dx' eines des anderen Stromes, r deren Entfernung, i, i' die im magnetischen Maasse gemessenen Stromintensitäten, so ist die Anziehung der beiden Elemente nach dem Ampère'schen Gesetze, wenn beide sich in atmosphärischer Luft befinden:

Fig. 5.



$$14)\quad p = \frac{i i' \, dx \, dx'}{r^2} [2 \cos(dx, dx') - 3 \cos(r, dx) \cos(r, dx')].$$

Sucht man die Componente q dieser Kraft senkrecht zu den beiden Strömen und substituirt für die Cosinus ihre Werthe, so findet man, wenn x die Entfernung des Elementes dx von der Projektion des Elementes dx' auf den Stromleiter, dem dx angehört, bedeutet:

$$q = i i' a \, dx \, dx' \left(\frac{2}{r^3} - \frac{3 x^2}{r^5}\right) = i i' a \, dx \, dx' \left(\frac{1}{r^3} + \frac{a^2 - 2 x^2}{r^5}\right).$$

Die gesammte Kraft Q, welche der eine Draht auf die Längeneinheit des zweiten ausübt, findet man, wenn man bezüglich dx von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt und $dx' = 1$ setzt. Wegen

$$\frac{1}{a^2} d\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r^3}, \quad d\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{a^2 - 2x^2}{r^5}$$

ergiebt sich

$$Q = \frac{2 i i'}{a}.$$

Wir wollen uns also die beiden sehr langen Drähte, in dem Normalmedium (atmosphärischer Luft) befindlich, von zwei Strömen von der gleichen Intensität durchflossen und letztere so gewählt denken, dass, wenn sich die Drähte in

der Entfernung eines Centimeters befinden, jeder auf die Längeneinheit des anderen gerade die Anziehungskraft zweier Dyne ausübt. Für einen Strom von solcher Intensität setzen wir $l' = 1$, dann können wir für beliebige Ströme l' durch eine Zahl ausdrücken und wissen, dass wir uns mit dem sonst als magnetischen Strommaasse bekannten Maasse im vollem Einklange befinden.

43. Wir betrachten nun einen einzigen unveränderlichen Strom von der Intensität l' (wie wir bereits sagen dürfen). *4. Erfahrungssatz. Joule's Gesetz. Messung von ω.*

Für diesen ist nach Gleichung 8: $L = W$. Die während der Zeit δt geleistete Arbeit ist: $L\delta l = Wl'\delta t$; die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit ist also Wl'.

Wenn dieser Strom sonst keinerlei Arbeit leistet, muss dieselbe als Wärme auftreten. Wir nehmen nun als aus der Erfahrung gegeben an, dass unter diesen Umständen die erzeugte Wärme in Arbeitsmaass gemessen gleich $\omega l'^2$ ist, wobei ω eine Constante der Leitungsbahn ist, welche wir den im magnetischen Maass gemessenen Widerstand nennen. Durch Messung der bei gemessener Stromintensität in einem Leiter auftretenden Wärme kann derselbe immer experimentell bestimmt werden. Damit der obige Ausdruck hiermit im Einklange sei, muss

15) $$W = \omega l',$$

also die Gegenkraft der Bewegungshindernisse proportional der Stromintensität oder der Geschwindigkeit l' des Antriebspunktes sein. Es wäre passender, die Constante ω als den Widerstandscoëfficienten oder den Widerstand bezogen auf die Stromeinheit zu bezeichnen, da er ja mit l' multiplicirt werden muss, um den thatsächlichen, von den Bewegungshindernissen herstammenden Widerstand W zu liefern.[1]) Es ist aber üblich, ω kurz als den galvanischen Leitungswiderstand zu bezeichnen.

44. Mit Rücksicht auf 15 liefert die erste Gleichung des vorigen Artikels *Ohm's Gesetz ist Consequenz unserer Annahmen. Messung von L.*

$$L = \omega l',$$

---

[1]) Eine ähnliche Bemerkung hat schon Hankel gemacht, sächs. Ges. v. 14. Nov. 1889, S. 382; Wied. Ann. 1890, Bd. 39, S. 369.

woraus in bekannter Weise L jedesmal experimentell bestimmt werden kann. Wir sind also in vollster Uebereinstimmung mit der Erfahrung, wenn wir L als die elektromotorische Kraft, in magnetischem Maasse gemessen, definiren, und zwar ist L die äussere, durch galvanische Elemente, Thermoelektricität etc. gelieferte elektromotorische Kraft, während die elektromotorische Kraft der Induction durch das erste Glied der rechten Seite der beiden ersten Gleichungen 12 dargestellt wird.

Fünfte Vorlesung.

Bewegungshindernisse im Dielektricum. Zwei Stromkreise mit Condensatoren. Messung der übrigen Grössen.

Widerstand am Modell.

45. Wir kehren nun zu unserem Modelle zurück. Damit für dasselbe die Gleichung 15 gelte, müssen wir annehmen, dass der Widerstand W nicht von einer Reibung der obersten und untersten Röhre in ihren Lagern herrührt, sondern etwa von Windflügeln, die sich so in einem widerstehenden Mittel bewegen, dass sie einen ihrer Geschwindigkeit proportionalen Widerstand finden. Um aber vollkommene Allgemeinheit zu erzielen, muss hierzu noch ein anderer Widerstand kommen.

5. Erfahrungssatz. Widerstand im Dielektricum.

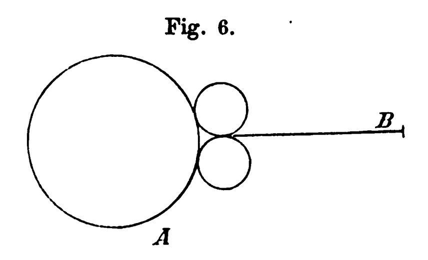
46. Wenn nämlich die Stromleitung irgendwo aufgeschnitten ist, und die beiden Enden mit den beiden Belegungen eines Condensators verbunden sind, so lehrt die Erfahrung, dass dem Strome ein Widerstand entgegenwirkt, welcher der Ladung des Condensators proportional ist; diese ist wieder dem Integralstrome

$$\int l'\, dt = l$$

proportional. Es muss also dann W noch ein zweites Glied ϑl enthalten, wobei ϑ eine neue Constante ist, deren reciproken Werth wir als die im magnetischen Maasse gemessene Capacität des Condensators bezeichnen.

Am Modelle könnte dieser Widerstand in folgender Weise dargestellt werden. Wir denken uns das eine Ende A einer elastischen Schnur an dem obersten resp. untersten Rohre, dessen Querschnitt in Fig. 6 durch den grossen Kreis dargestellt ist, das andere Ende (im unaufgewickelten Zustande ohne Spannung) an einem in gewisser Entfernung befindlichen Fixpunkte B fest gemacht. Die elastische Schnur läuft unmittelbar am Rohre reibungslos zwischen zwei sehr kleinen Rollen hindurch. Bei Drehung des Rohres wickelt sie sich auf dasselbe auf und übt vermöge ihrer Spannung auf das Rohr eine der Drehung entgegen wirkende Kraft aus, welche dem Drehungswinkel proportional ist.

Fig. 6.



47. Es muss hier bemerkt werden, dass durch Einführung des Widerstandes ϑl die Bewegung aufhört im strengen Sinne cyklisch zu sein, da ja die Aufwindung der elastischen Schnur auf die Axe kein cyklischer Vorgang ist; allein da ausser diesem Vorgang alle übrigen Bewegungen cyklisch sind und genau so verlaufen, wie sie bei blossem Vorhandensein des Widerstandes $\omega l'$ sich abspielen, so kann wohl kein Zweifel bestehen, dass unsere Gleichungen anwendbar bleiben. *3. Hypothese. Ergänzung zum 2. Erfahrungssatze.*

Dieselbe Annahme muss natürlich auch für die Elektricitätsbewegung in Dielektricis gemacht werden. Diese ist selbsverständlich wieder eigentlich nicht cyklisch, da sie nur kurze Zeit in gleich gerichtetem Sinne bestehen kann, wenn nicht das Dielektricum unendlich stark polarisirt werden soll. Allein wir nehmen an, dass sowohl die Bewegung im Innern des Dielektricums als auch die dadurch erzeugte Bewegung im umgebenden Aether (nur während kürzerer Zeit) genau so geschieht, wie sie in einem Leiter dauernd in vollkommen cyklischer Weise vor sich geht. Es wird dies zur Folge haben, dass mit Ausnahme des veränderten Ausdrucks für W auf beide Fälle dieselben Gleichungen anwendbar sind.

Gleichungen für die elektrischen Oscillationen.

48. Nehmen wir an, es seien sowohl an der oberen als auch an der unteren Röhre sowohl Windflügel als auch eine elastische Schnur befestigt, so lauten die Bewegungsgleichungen unseres Systems:

$$16)\quad \begin{cases} L_1 = \dfrac{d}{dt}(Al'_1 + Cl'_2) + \omega_1 l'_1 + \vartheta_1 l_1, \\ L_2 = \dfrac{d}{dt}(Cl'_1 + Bl'_2) + \omega_2 l'_2 + \vartheta_2 l_2, \\ K = -\dfrac{l'^2_1}{2}\dfrac{\partial A}{\partial k} - \dfrac{l'^2_2}{2}\dfrac{\partial B}{\partial k} - l'_1 l'_2 \dfrac{\partial C}{\partial k}. \end{cases}$$

Genau dies sind auch die Gleichungen für 2 Stromkreise mit den Stromintensitäten l'_1 und l'_2 und den Widerständen ω_1 und ω_2, wenn in jedem derselben ein galvanisches Element von der elektromotorischen Kraft L_1 resp. L_2 und ein Condensator von der Capacität $1:\vartheta_1$ resp. $1:\vartheta_2$ eingeschaltet ist.[1]) A, B sind die Selbst-, C der wechselseitige Induktionscoëfficient der Stromkreise. Es muss als ein Vorzug der Maxwell'schen Theorie bezeichnet werden, dass wir diese für die Praxis so wichtigen Gleichungen, welche sonst erst als Consequenz der gesammten Theorie der Elektrodynamik und Induktion auftreten, gleich zu Anfang aus den wenigen beigezogenen Erfahrungsthatsachen und Hypothesen erhalten. Die grosse logische Schärfe der Maxwell'schen Theorie äussert sich eben darin, dass wir nicht alle Erfahrungsthatsachen auf einmal voranzustellen brauchen, sondern jedesmal bei Hinzuziehung einer neuen Thatsache sogleich alle Resultate gewinnen, welche sich aus den bisher beigezogenen Erfahrungsthatsachen überhaupt folgern lassen.

Die Gleichungen 16 könnten mit der grössten Leichtigkeit auf ein System von mehr als 2 Stromkreisen ausgedehnt werden, sie erschöpfen dann vollständig die Theorie der Selbstinduktion, wechselseitiger Induktion und elektrodynamischer Wechselwirkung, so lange die Stromschwan-

---

[1]) Thomson, phil. mag. (4), 5, S. 393; Helmholtz, Pogg. Ann. 83, S. 505, 91, S. 258, 427; Wiedemann, Lehre von der Elektr. IV. Bd. S. 166.

kungen so langsam sind, dass die Stromintensität zu einer gegebenen Zeit in allen Längen- und Querschnittelementen je eines geschlossenen Stromleiters gleich vorausgesetzt werden kann. Um sich aber von dieser Beschränkung frei zu machen, um die Abhängigkeit der Coëfficienten A, B, C von den Abmessungen der Drähte, endlich um die Elektricitätsbewegung in körperlich ausgedehnten Leitern zu finden, ist die Zuziehung weiterer Erfahrungsthatsachen erforderlich, welche wir auf eine spätere Vorlesung versparen wollen.

Bedeutung des Modells in der Theorie.

49. Die vollkommene Identität der Gleichungen für unser mechanisches System mit denen für 2 Stromkreise, ist keineswegs etwa eine bloss zufällige, sondern vielmehr eine im Wesen begründete, da ja sowohl unser mechanisches System als auch die beiden Stromkreise nach unserer Voraussetzung genau derselben Klasse von Mechanismen angehören, wenn auch Hülfsmittel und Form der Ausführung die denkbar verschiedensten sind. Aus dieser Identität des mechanischen Grundtypus ist auch die vollkommene Analogie zwischen dem Ablaufe der elektrischen Oscillationen und der Bewegung höchst einfacher Mechanismen z. B. gedämpfter Pendel erklärlich.

Theorie einer unbekannten Bewegung.

Natürlich ist der Mechanismus der elektrischen Ströme nicht nur vollständig von solchen einfachen Mechanismen verschieden, sondern auch uns vollkommen unbekannt; wir haben also hier eigentlich die Theorie einer Bewegung aufzustellen, deren Mechanismus uns ganz unbekannt ist, ja vielleicht in einer uns noch ganz unvorstellbaren Weise von allen Mechanismen abweicht, die wir aus festen Stangen, incompressibeln oder elastischen Flüssigkeiten, fernwirkenden Anziehungscentren u. s. w. construiren können.

Deshalb sind wir gezwungen, andere uns bekannte Mechanismen zur „dynamischen Illustration“ nebenher zu betrachten, und wir sind überzeugt, dass alles, was nothwendige Consequenz der Grundgleichungen der Mechanik ist, nicht bloss von unseren Modellen, sondern ebenso auch von dem elektrischen Mechanismus gelten wird.

So fremdartig daher auch die Theorie einer Bewegung erscheint, von der wir keine Vorstellung haben, so habe ich

doch schon am Ende der zweiten Vorlesung erörtert, dass der Unterschied zwischen der Methode unserer Theorie und der vieler älteren Theorien vielleicht bei weitem nicht so gross ist, als es auf den ersten Anblick scheinen mag.

Discussion der Gleichungen 16.

Es wäre einladend, sofort die praktische Anwendung der Gleichungen 16 in allen Details zu diskutiren und so auch die speciellen Anwendungen in unsere Vorlesungen aufzunehmen, damit gerade dem Praktiker das Studium der alten Theorien, welche für den Theoretiker immer von grossem Interesse bleiben werden, ganz erspart bleibe. Allein dies ist hier nicht meine Absicht, ich muss also bezüglich der praktischen Anwendung auf die alten Lehrbücher verweisen; nur wenige für unsere Theorie unentbehrliche Anwendungen dieser Gleichungen sollen hier gemacht werden. Zuvörderst soll die Gleichung, welche das Princip der Erhaltung der Arbeit ausdrückt, aus den Gleichungen 16 abgeleitet werden.

Erhaltung der Arbeit.

50. Die Arbeit, welche durch die äusseren elektromotorischen Kräfte, während der Zeit δt in das System hinein gesteckt wird, ist:

$$\delta Q = L_1 \delta l_1 + L_2 \delta l_2 = (L_1 l'_1 + L_2 l'_2)\,\delta t.$$

Am Modelle ist dies die Arbeit, welche geleistet wird, während sich die beiden Kurbeln in der Zeit δt um die Winkel δl_1 und δl_2 mit den Winkelgeschwindigkeiten l'_1 und l'_2 drehen und darauf die Kräfte L_1 und L_2 in der Bewegungsrichtung derselben wirken.

Substituirt man hier für L_1 und L_2 deren Werthe aus den Gleichungen 16, so erhält man eine Anzahl von Gliedern, welche wir jetzt der Reihe nach aufzählen und durch dem δQ beigefügte Indices unterscheiden wollen. Die mit den Faktoren ω behafteten Glieder liefern:

Joule'sche Wärme.

17) $$\delta Q_1 = (\omega_1 l'^2_1 + \omega_2 l'^2_2)\,\delta t.$$

Diese Arbeit wird beim Modelle an den Windflügel in Wärme umgesetzt und ist beim elektrischen Strome die

Joule'sche Wärme. Die mit den Faktoren ϑ behafteten Glieder liefern: *Auf Dielektrisirung verbrauchte Arbeit.*

18) $$\begin{cases} \delta Q_2 = \vartheta_1 l_1 \, \delta l_1 + \vartheta_2 l_2 \delta l_2 = \delta\left(\frac{\vartheta_1 l_1^2}{2} + \frac{\vartheta_2 l_2^2}{2}\right) \\ = \delta\left(\frac{\Theta_1 l_1}{2} + \frac{\Theta_2 l_2}{2}\right) = \delta\left(\frac{\Theta_1^2}{2\vartheta_1} + \frac{\Theta_2^2}{2\vartheta_2}\right). \end{cases}$$

$\Theta_1 = \vartheta_1 l_1$ und $\Theta_2 = \vartheta_2 l_2$ sind die Gegenkräfte der dielektrischen Polarisation. Diese Arbeit wird im Modelle auf Spannung der elastischen Schnüre, bei den elektrischen Phänomenen auf Erzeugung dielektrischer Polarisation verwendet.

Die Gesammtsumme, welche alle übrigen Glieder liefern, kann als die Summe zweier Ausdrücke δQ_3 und δQ_4 dargestellt werden, indem man setzt: *Aeussere Arbeit.*

19) $$\begin{cases} \delta Q_3 = \frac{l_1'^2}{2} \delta A + \frac{l_2'^2}{2} \delta B + l'_1 l'_2 \delta C \\ = \sum \left(\frac{l_1'^2}{2} \frac{\partial A}{\partial k} + \frac{l_2'^2}{2} \frac{\partial B}{\partial k} + l'_1 l'_2 \frac{\partial C}{\partial k}\right) \delta k. \end{cases}$$

Dies ist am Modell derjenige Betrag der durch die Kurbeln in das System hineingesteckten Arbeit, welcher auf Hebung der an den drei Fäden angehängten Lasten bei Verschiebung der drei Massen m_1, m_2, m_3 verwendet wird; bei elektrischen Strömen derjenige Theil der von der Batterie gelieferten Energie, welcher bei sichtbarer Massenbewegung die zur Ueberwindung der ponderomotorischen Kräfte erforderliche Arbeit leistet. Endlich setze man: *Elektrokinetische Energie.*

20) $$\delta Q_4 = \delta T,$$

wobei:

21) $$\begin{cases} T = \frac{l_1'^2}{2} A + \frac{l_2'^2}{2} B + l'_1 l'_2 C \\ = \frac{1}{2}\left(l'_1 \frac{\partial T}{\partial l'_1} + l'_2 \frac{\partial T}{\partial l'_2}\right) = \frac{1}{2}(l'_1 \lambda_1 + l'_2 \lambda_2) \end{cases}$$

am Modelle die lebendige Kraft der drei Massen m_1, m_2, m_3, bei den elektrischen Phänomenen aber die lebendige Kraft derjenigen Bewegung ist, welche in ihrer Gesammtheit den elektrischen Strom ausmacht und theils im durchströmten Drahte, theils im umgebenden Medium ihren Sitz hat. Wir wollen sie als die elektrokinetische Energie bezeichnen.

Wissen wir auch weder über das Bewegte noch über die Art der Bewegung irgend etwas, so wissen wir doch, dass die lebendige Kraft dieser Bewegung einen bestimmten endlichen Werth hat, den wir in einem vorliegenden Falle berechnen können, der bei Entstehung des Stromes aus der chemischen Energie des galvanischen Elementes oder aus anderen uns bekannten Arbeitsquellen entnommen und beim Verschwinden des Stromes wieder in Wärme oder andere uns bekannte Energieformen zurückverwandelt wird. Dies wird noch klarer an den speciellen Fällen, zu denen wir jetzt übergehen wollen.

Messung von A.

51. Sei nur ein Stromkreis ohne Condensator vorhanden, seine Gestalt und die Lage etwa in der Nähe befindlicher Eisenmassen sei unveränderlich; dann liefern die Gleichungen 16 für denselben:

$$L = A \frac{dl'}{dt} + \omega l'.$$

Haben wir zu Anfang einen gegebenen constanten Strom l'^a und lassen zur Zeit Null plötzlich die elektromotorische Kraft aufhören, so dass dann $L = 0$ wird, so folgt:

$$l' = l'^a e^{-\frac{\omega}{A} t}.$$

Die Elektricität bewegt sich also wie eine träge Masse bei einem der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand z. B. eine in einer Röhre strömende Flüssigkeit, nur dass ihre gesammte Trägheit auch von der Gestalt des Stromleiters abhängt, namentlich durch spiralige Aufwicklung desselben bedeutend vermehrt wird, was in dem Umstande begründet ist, dass das umgebende Medium an der Bewegung participirt. Natürlich muss sich, wenn die Bewegung der Elektricität aufgehört hat, deren anfängliche elektrokinetische Energie $A.(l'^a)^2 : 2$ (nach Gleichung 21) in Wärme verwandelt haben. In der That hat die erzeugte Wärme:

$$\int_0^\infty \omega \frac{l'^2}{2} dt$$

(vergl. Gleichung 17) diesen Werth.

Experimentell kann am leichtesten durch den Impuls auf einen anderen bekannten Strom oder einen permanenten Magnet das Integral:

$$\int_0^\infty l'\,dt = \frac{A l'^a}{\omega}$$

bestimmt werden und hieraus kann, da l'^a und ω ebenfalls experimentell bestimmbar sind, A gemessen werden.

Wäre auch ein Condensator in der Strombahn, so bekäme man nach Aufhören der elektromotorischen Kraft die Gleichung: *Messung von ϑ.*

$$A l'' + \omega l' + \vartheta l = 0,$$

welche auch für die Schwingungen einer gedämpften Magnetnadel gilt. Nach dieser Gleichung wurden alle bisher beobachteten elektrischen Oscillationen von Feddersen bis Hertz[1]) berechnet. Dieselbe kann zur experimentellen Bestimmung von ϑ dienen, wobei wir noch das Produkt $l't$, wenn darin $l' = 1$ und $t = 1$ ist, vorläufig die magnetisch gemessene Elektricitätsmenge 1 nennen, natürlich ohne uns dabei weiter etwas zu denken.

52. Es seien nun wieder zwei Strombahnen von unveränderlicher Gestalt gegeben; zu Anfang der Zeit sollen darin die Stromintensitäten l'^a_1 und l'^a_2 bestanden haben. Da hören plötzlich die äusseren elektromotorischen Kräfte auf und es wird daher: *Messung von C.*

$$22)\quad \begin{cases} A\dfrac{dl'_1}{dt} + C\dfrac{dl'_2}{dt} + \omega_1 l'_1 = 0, \\ C\dfrac{dl'_1}{dt} + B\dfrac{dl'_2}{dt} + \omega_2 l'_2 = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort:

---

[1]) Kirchhoff, Ueber die Beweg. d. El. in Drähten. Pogg. Ann. Bd. 100, S. 193, 351, 1857. Schiller, Pogg. Ann. 152, S. 535, 1874. L. Lorenz, Wied. Ann. 7, S. 161, 1879. Colley, Wied. Ann. 26, S. 432, 1885, 28. S. 1, 1886. Hieke, Wien. Ac. 96, S. 134, 1887. Oberbeck, Wied. Ann. a. a. Bd. 21, S. 139, 1884. Lodge, Ueber Inductionswaage, phil. mag. Febr. 1880. Lodge, Hertzsche Schwingungen. Lond. phys. soc. Bd. 10, S. 150, 1889. Lecher, Wien. Ac. Bd. 99, S. 357, 1890.

$$(\omega_1 l'^2_1 + \omega_2 l'^2_2)\,dt = d\left(\frac{A}{2} l'^2_1 + \frac{B}{2} l'^2_2 + C l'_1 l'_2\right).$$

Die linke Seite ist die während dt entwickelte Wärme; dieselbe wird also bloss auf Kosten der gesammten elektrokinetischen Energie erzeugt und ist gleich der Abnahme der letzteren während derselben Zeit.

Integriren wir die letzte der Gleichungen 22 bis zu einer sehr späten Zeit, zu welcher l'_1, l'_2 die Werthe l'^e_1, l'^e_2 haben sollen, so erhalten wir:

$$B(l'^a_2 - l'^e_2) + C(l'^a_1 - l'^e_1) = \omega_2 \int l'_2\, dt.$$

Um C zu bestimmen erhalten wir anfangs durch längere Zeit l'_1 constant gleich l'^a_1, während im zweiten Stromkreise keine elektromotorische Kraft wirkt, so dass $l'^a_2 = 0$ ist. Dann entfernen wir plötzlich auch aus dem ersten Stromkreise die elektromotorische Kraft und bestimmen experimentell den Integralstrom im zweiten Stromkreise $\int l'_2\, dt$ über eine genügend lange Zeit erstreckt. Da nach einer solchen jedenfalls beide Ströme aufhören, so ist $l'^e_1 = l'^e_2 = 0$ also:

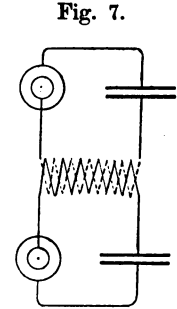
$$C l'^a_1 = \omega_2 \int l'_2\, dt,$$

woraus C experimentell bestimmt werden kann.

Da wir nun auch alle Constanten experimentell bestimmt haben, so herrscht über die Gleichungen volle Klarheit. Alle diese Consequenzen können daher schon aus den wenigen bis jetzt zugezogenen Thatsachen und Hypothesen abgeleitet werden.

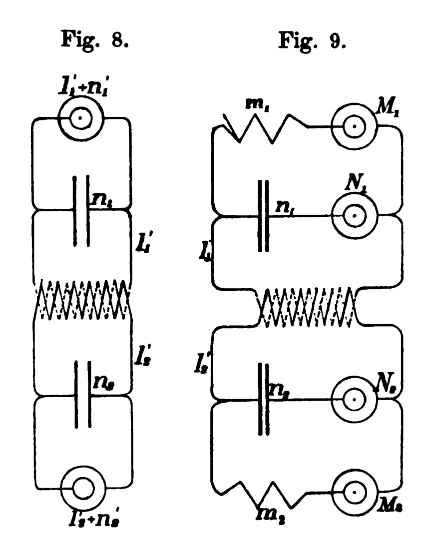
Andere Schaltungen von Cond. und Widerstand.

Fig. 7.



53. Die Gleichungen 16 gelten, falls Condensator und Widerstand hintereinander in die Stromleitung eingeschaltet sind, wie Fig. 7 zeigt. Es ist dies die praktisch weitaus am häufigsten angewendete Schaltung; doch sind andere Schaltungen offenbar nicht ausgeschlossen. Es könnten z. B. in jedem Zweige Condensator und Widerstand nebeneinander geschaltet sein (Fig. 8). Dann hätte man eigentlich vier separate Zweige und es könnte die Strom-

stärke, wenn die Capacität des Condensators eine sehr grosse ist, in allen vier Zweigen verschieden sein. Doch erhält man in verschiedenen speciellen Fällen Gleichungen von derselben Einfachheit, z. B. wenn in der Leitung von der Batterie zum CondensatorInduktionscoëfficient, Widerstand und Capacität verschwinden. Bezeichnet man dann mit l'_1 und l'_2 die Stromstärken in den Zweigen, welche die Widerstände enthalten und wo die elektromotorischen Kräfte der Induktion wie zahlreiche, in je eine Windung eingeschaltete galvanische Elemente von kleiner elektromotorischer Kraft wirken, mit n_1 und n_2 die Condensatorladungen, und mit L_1, L_2 die elektromotorischen Kräfte der Ketten, so wird:



$$L_1 = \frac{d}{dt}(Al'_1 + Cl'_2) + \omega_1 l'_1 = \vartheta_1 n_1.$$

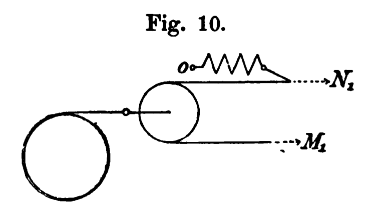
Eine noch complicirtere Schaltung stellt Fig. 9 dar, in welcher bloss die gerad gebrochen gezeichneten Leitungen mit den Stromstärken m'_1 und m'_2 erheblichen Widerstand ω_1, ω_2; bloss die spiralig gezeichneten, mit den Stromstärken l'_1 und l'_2 erhebliche Selbst- und Wechselinduktionscoëfficienten A, B, C haben sollen. n_1, n_2 sollen wieder die Ladungen der Condensatoren sein, und es kann ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit angenommen werden, dass bloss in den geradgebrochenen Leitungen und in den Leitungen zum Condensator galvanische Elemente, in ersterer von den elektromotorischen Kräften M_1, M_2, in letzterer von N_1, N_2 eingeschaltet sind. Dann gelten die Gleichungen:

$$
23)\quad \begin{cases} M_1 - \frac{d}{dt}(Al'_1 + Cl'_2) = \omega_1 m'_1 \\ N_1 - \frac{d}{dt}(Al'_1 + Cl'_2) = \vartheta_1 n_1 \end{cases}
$$
$$
l'_1 = m'_1 + n'_1.
$$

Die Gleichungen für den zweiten Stromcomplex können hier wie oben der Symmetrie gemäss gebildet werden, da derselbe genau wie der erste beschaffen ist.

Am Modelle würden Gleichungen von der Form der zuletzt entwickelten gelten, wenn sich sowohl um die oberste als auch unterste Röhre eine Schnur aufwickeln würde, welche die Axe je einer beweglichen Rolle trügen. Um diese liefe eine zweite Schnur (Fig. 10). Auf das eine Ende derselben wirkte die äussere Kraft N_1, deren Zug sich eine elastische Feder entgegensetzte; auf das andere die äussere Kraft M_1 und ein der Geschwindigkeit des Schnurendpunkts proportionaler Widerstand. Um die Bedingungen auch für negative m' und n zu erfüllen, müssten die Schnüre auch unzusammenschiebbar sein.

Fig. 10.



Sechste Vorlesung.

Praktische Ausführung der Modelle.

Mechanismus, um A, B, C unabhängig veränderlich zu machen.

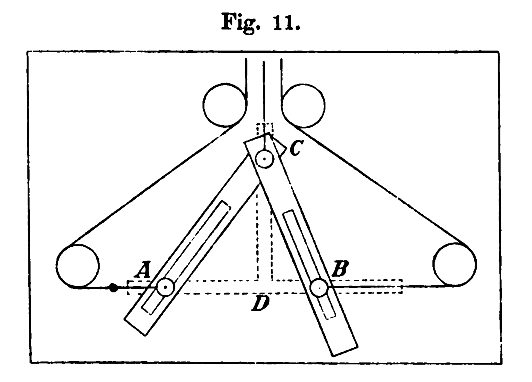
54. Durch Aenderung von r_1 oder r_2 am Modell werden nur die Selbstinduktionscoëfficienten A und B verändert. Bei Veränderung von r_3 aber verändert sich nicht bloss der wechselseitige Induktionscoëfficient C, sondern auch gleichzeitig A und B, da ja das mittlere Rohr von jedem der anderen mitbewegt wird. Es ist wünschenswerth, drei Antriebspunkte so herzustellen, dass bei alleiniger Bewegung des ersten nur A, daher nur r_1, bei alleiniger Bewegung

des zweiten nur B, daher nur r_2, bei alleiniger Bewegung des dritten nur C wächst; bei alleiniger Bewegung des dritten muss daher r_3 wachsen, dagegen r_1 und r_2 so abnehmen, dass $r_1^2 + r_3^2$ und $r_2^2 + r_3^2$ constant bleibt.

1. Theilmechanismus.

Es kann dies durch folgenden Mechanismus erreicht werden. In einem ebenen Messingbleche seien zwei aufeinander senkrechte in Figur 11 punktirte gerade Schlitze, die sich im Punkte D schneiden; darauf liegen zwei der Länge nach aufgeschlitzte Lineale. Das Scheibchen C ist an einem kurzen Stifte befestigt, der durch kleine Löcher beider Lineale hindurchgeht, und im vertikalen Schlitze des Bleches beliebig gleiten kann. An diesem Scheibchen ist der mit m_3 verbundene Faden befestigt; es dient als dritter Angriffspunkt und seine Distanz vom Punkte D heisse z.

Fig. 11.



Die beiden Scheibchen A und B gleiten sowohl im horizontalen Schlitze des Bleches als auch in je einem Schlitze eines Lineales. Daran seien die beiden Fäden, welche zu den Massen m_1 und m_2 führen, in der aus der Figur ersichtlichen Weise befestigt; sie gehen zuerst vom Scheibchen in der Richtung des horizontalen Schlitzes des Blechs fort, dann über eine am fixen Bleche befestigte Rolle, dann über je eine zweite ganz nahe am zuerst besprochenen Faden befindliche Rolle und endlich parallel diesem vertikal aufwärts.

Sind die Längen der Fäden so regulirt, dass jede Masse m gerade in die Axe der drei Röhren zu liegen kommt, wenn das betreffende Scheibchen nach D gelangt, so sind die Bedingungen erfüllt: $r_1^2 + r_3^2 = AC^2$ und

$r_2^2 + r_3^2 = BC^2$. Es ist also nur noch ein Mechanismus nothwendig, welcher gestattet, bei unveränderter Lage des Punktes C die Längen AC und BC zu ändern und umgekehrt bei Constanz dieser Längen den Punkt C zu verschieben.

2. Theilmechanismus. Dies kann so realisirt werden: Vor dem beschriebenen Bleche befindet sich ein zweites paralleles und parallel zu sich selbst verschiebbares in der Distanz x vom ersten Bleche. Am Scheibchen C ist eine in die Richtung des Schlitzes des Lineales AC fallende nicht ganz bis A reichende und eine zweite senkrecht zu den Blechen nach vorn zu liegende nicht ganz bis zum zweiten Bleche reichende sehr enge Röhre befestigt. Vom Scheibchen A geht eine dritte Röhre aus in der Richtung AC, die in die erste etwas hineinragt. Vom zweiten Bleche aber eine vierte Röhre, die wieder in die zweite etwas hineinragt. Die vierte Röhre ist am Bleche so befestigt, dass sie stets senkrecht dazu bleiben muss, sich aber beliebig parallel zu sich selbst verschieben kann. Durch alle vier Röhren geht ein biegsamer aber weder ausdehnsamer noch zusammenschiebbarer Faden, dessen eines Ende am Scheibchen A befestigt ist, dessen anderes aber gezwungen ist in der Ebene des zweiten Bleches zu liegen. Genau so ist das Scheibchen B mit einem hinter dem ersten Bleche in der Distanz y davon befindlichen dritten Bleche verbunden. x, y, z sind die Variablen, von denen jede nur einen Induktionscoëfficienten ändert; x, y je einen Selbstinduktionscoëfficienten; verändert sich dagegen bei constantem x und y nur z, so ändert sich bei constanten Selbstinduktionscoëfficienten nur der wechselseitige Induktionscoëfficient.

Sind alle drei Röhren in Drehung begriffen, so wirkt daher auch auf die Variable x nur die l'^2_1 proportionale Kraft, auf die Variable y nur die l'^2_2 proportionale, endlich auf z nur die dem Produkte $l'_1 l'_2$ proportionale Kraft. Auf z wirkt also keine Kraft, wenn sich nur das obere oder nur das untere Rohr dreht.

Praktische Ausführung solcher Modelle. 55. Diese idealen Modelle genügen vollständig unseren Zwecken; sie sollen ja bloss zur Veranschaulichung nicht zur experimentellen Prüfung der abgeleiteten Sätze dienen.



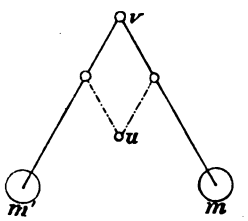
Trotzdem wirkt auch hier mächtig der Drang nach realer Existenz. Es beschreibt Lord Rayleigh[1]) einen zu diesem Zwecke dienenden sehr einfachen Apparat, an welchem jedoch die Parameter nicht verändert werden können, was für uns gerade sehr wesentlich ist. Derselbe erwähnt auch einen Apparat des Laboratoriums zu Cavendish, der mir leider unbekannt ist. Ich liess zu gleichem Zwecke einen Apparat construiren, der wie ich glaube allen Anforderungen genügt.

Fig. 12.

Reales Monocykel.

Ich beschreibe zunächst einen Apparat, welcher ein monocyklisches System darstellt. Eine cylindrische Röhre B, Fig. 12, in der ein cylindrischer Stab A steckt, ist von einem Ringe C umgeben, der mit zwei Schrauben D mit dem Stabe fest verbunden ist. Die Schrauben gehen durch passende Schlitze der Röhre. Die Fig. 12 ist ein Querschnitt. Der Ring ist von einem beweglichen Hohlringe E umschlossen und dieser von einer zweiten der ersten coaxialen Röhre F. Der Hohlring trägt zwei vis-à-vis liegende kleine Zapfen u, die wieder durch passende Schlitze der äusseren Röhre F hindurchgehen. Ist die innere Röhre fest und rotirt die äussere, so rotirt also der Hohlring mit, der massive, an der Stange befestigte nicht. Ohne die Rotation zu stören, können durch Aus- und Einschieben der Stange die Zapfen dabei auf- und abbewegt werden. Sie sollen deshalb die verschiebbaren Zapfen heissen.

Fig. 13.



Die äussere Röhre trägt noch zwei fixe Zapfen v. Je ein fixer und ein beweglicher Zapfen aber tragen die beiden vis-à-vis liegenden Ecken (in Fig. 13 wieder mit u und v bezeichnet) eines Parallelogramms, das ganz wie der Centrifugalregulator einer Dampfmaschine ein-

[1]) Phys. Soc. of London Volum. 10, p. 434. November 1890.

gerichtet ist. (In Fig. 13 in der Seitenansicht gezeichnet.) Die Ebenen beider Parallelogramme sind parallel der Röhrenaxe und auch zu einander und stehen um die Rohrdicke ab. Beide Parallelogramme tragen an beiden Enden je eine Masse m und m', so dass also diese Massen ohne Störung der Rotation gehoben und gesenkt werden können. Dieser Apparat wurde nur ganz roh zur Erläuterung eines Bestandtheiles des Nachfolgenden ausgeführt, da die mit ihm auszuführenden Experimente nicht von Belang sind.

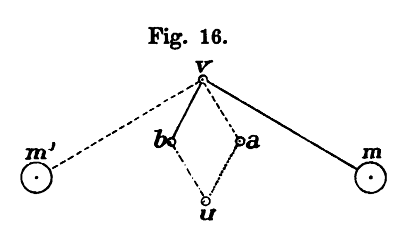
Reales Bicykel.

56. Wir brauchen nur drei derartige Apparate nach Art der Fig. 4 Art. 39 zu koppeln, so erhalten wir ein Bycikel, von dem Fig. 14 einen Durchschnitt und Fig. 15 eine perspectivische Zeichnung zeigt. In Figur 14 ist, um Platz zu sparen, nur das mittlere Drittel gezeichnet.

Das Stahlrohr B geht durch den ganzen Apparat und ist oben und unten getragen. Dasselbe wird durch zwei fixe darüber gesteckte kurze Rohrstücke G in drei gleiche Theile getheilt. Um jeden dieser Theile rotirt ein bewegliches Messingrohr F. Die Reibung des obersten und untersten stellt die Kräfte W_1 und W_2 dar, wenn sie freilich auch ein anderes Gesetz befolgt. Zwischen dem mittleren dagegen und den beiden kurzen Rohrstücken, sowie zwischen dem später zu beschreibenden fixen und rotirenden Ring im Innern dieses Rohres sind behufs möglichster Verminderung der Reibung Friktionskugeln K eingefügt, wie sie bei den Fahrrädern der Byciklisten üblich sind, um doch in einer Hinsicht der Namensvetterschaft der beiden Vorrichtungen gerecht zu werden. Durch das Stahlrohr B geht ein Stab A, welcher mit drei über das Stahlrohr gesteckten auf- und abschiebbaren, aber nicht drehbaren Ringen C (in Fig. 14 nur der mittlere sichtbar) verbunden ist. Zwischen jedem derselben und dem ebenfalls am Stabe befestigten Stift S läuft je ein drehbarer Ring E, welcher den einen Befestigungspunkt u des Centrifugalregulators trägt. Der nicht drehbare Ring C und der Stift S zusammen entsprechen dem in Figur 12 mit C bezeichneten Ringe. Sonst bezeichnen gleiche Buchstaben in Figur 12 und 14 auch entsprechende Bestandtheile. Der Stift S und die Verbindungs-

schraube zwischen A und C gehen natürlich durch einen passenden Schlitz des Rohres B. Der unterste drehbare Ring und der Zapfen v_1 (um 90 Grad verdreht v'_1) der untersten beweglichen Röhre F_1 tragen, ebenfalls genau wie in Figur 12 und 13, zwei Centrifugalregulatoren; ebenso oben. An dem Zapfen u (oder u', letzteres stellt eine um 90 Grad verdrehte Lage dar) des mittleren drehbaren Ringes E und v des mittleren beweglichen Rohres F aber ist ein anders beschaffener Centrifugalregulator befestigt. Die Centrifugalregulatoren sind in Figur 14 in zwei Lagen punktirt.

Fig. 16.



Der mittlere derselben trägt viermal so grosse Massen und die Arme, welche die Massen tragen, sind senkrecht an den Armen des Parallelogramms befestigt. (Siehe Figur 16, wo immer gleich punktirte Linien ein fest verbundenes System von Stangen darstellen.) Bei Annäherung der Zapfen nähern sich daher die Massen der Axe. Zapfen u geht natürlich durch einen Schlitz des Rohres F. Man sieht leicht, dass dieser Mechanismus so beschaffen ist, dass r_3 abnimmt, wenn r_1 und r_2 wachsen, und zwar erfüllt er die Bedingung:

$$r_1^2 + r_3^2 = r_2^2 + r_3^2 = \text{const.}$$

Durch Senken der centralen Stange wird r_3, daher auch C vergrössert, ohne dass B und A sich ändern. Dies entspricht der Vermehrung des wechselseitigen Induktionscoëfficienten; also, wenn die obere und untere Röhre zwei Stromkreise darstellen, der Annäherung derselben. Auf zwei andere Antriebspunkte, durch welche die Selbstinduktionscoëfficienten geändert werden könnten, wurde verzichtet.

An der oberen und unteren Röhre ist je ein horizontales Zahnrad, an der mittleren sind mittelst der Schrauben p zwei Stangen P befestigt, welche je ein vertikales Zahnrad tragen. Die vertikalen Zahnräder greifen mit einer konischen Verzahnung in die beiden horizontalen Zahnräder ein.

Die Verzahnungsstellen sind in Fig. 14 mit Z bezeichnet. Durch diese Verzahnung wird derselbe Effekt wie in Fig. 4, Art. 39 durch Reibung der drei Scheiben erzielt. Die Zapfen w dienen bloss, um die Centrifugalregulatoren bei Versuchen, wo ihre Winkel nicht geändert werden, auch an den Röhren F direct befestigen zu können.

Die untere bewegliche Röhre F_1 trägt (in Fig. 14 nicht sichtbar) eine, die obere F_2 zwei horizontal liegende Riemenscheiben. Seitwärts steht eine zweite parallele vertikale Axe, durch eine Kurbel drehbar, mit drei Riemenscheiben, welche nach Wunsch an die Axe geklemmt und losgemacht werden können. Eine ist mit der Riemenscheibe der unteren Röhre, die beiden anderen mit den beiden Riemenscheiben der oberen Röhre, jedoch so verbunden, dass sich oben das eine Paar gleichsinnig, das andere entgegengesetzt dreht.

Experimente mit dem realen Bicykel.

57. Mit diesem Apparate können folgende Experimente ausgeführt werden:

1. Man treibt bloss das untere Rohr; so lange die Geschwindigkeit wächst, dreht sich das obere entgegengesetzt; bei constanter Drehung des unteren steht das obere still; nimmt die Geschwindigkeit ab, so dreht sich das obere gleichsinnig. Diese Wirkung ist grösser, wenn die centrale Stange ganz unten als wenn sie oben ist.

2. Das untere Rohr wird mit constanter Geschwindigkeit angetrieben, oben sind beide Riemenscheiben nicht geklemmt. Schiebt man die Stange rasch nach abwärts, vermehrt also den wechselseitigen Induktionscoëfficienten, so dreht sich das obere Rohr entgegengesetzt; schiebt man die Stange aufwärts, so dreht es sich gleichsinnig wie das untere Rohr.

3. Dreht man das obere und untere Rohr in gleichem Sinne, so wird die centrale Stange nach abwärts gezogen, was einer Vermehrung der Selbstinduktion, also einer Annäherung der beiden Stromkreise entspricht.

4. Dreht man das obere und untere Rohr entgegengesetzt, so wird die Stange hinaufgezogen.

58. Dieser Apparat wurde von dem Mechaniker Herrn v. Gasteiger in Graz in vorzüglicher Weise ausgeführt

und die Experimente an demselben gelingen vollständig; für die Werkzeichnungen und manche Hilfeleistung bei der Construktion bin ich Herrn Privatdocenten Dr. Paul Czermak in Graz, für die Beihilfe bei einigen nachträglichen Veränderungen und die Anfertigung sämmtlicher Zeichnungen und Photographien für das vorliegende Buch Herrn Dr. Fomm, Assistenten der Physik in München zu Danke verpflichtet.

Siebente Vorlesung.

Polycykel. Begriff des Momentes.

---

59. Um die Abhängigkeit des Induktionscoëfficienten von den Abmessungen der Stromkreise zu finden, müssen wir natürlich jedes Längenelement eines solchen als ein kleines Monocykel, um die Strömung der Elektricität durch räumlich ausgedehnte Körper zu finden, jedes Volumelement als ein selbständiges Individuum, in welchem eine cyklische Bewegung stattfindet, betrachten. *Uebergang zu neuen Phänomenen.*

Könnten wir dies in mechanischen Modellen zum Ausdrucke bringen, könnten wir den ganzen Raum mit kleinen Modellen von der Natur der soeben betrachteten füllen und die Wechselwirkung aller überblicken: Wir könnten uns ein anschauliches Bild aller elektrischen und magnetischen Phänomene machen. Allein einen derartigen Mechanismus, von dem der in Maxwell's ersten Arbeiten angenommene, in sechseckige Zellen getheilte Aether eine Idee giebt, in Messing auszuführen oder sich in der Vorstellung klar zu veranschaulichen, wäre gleich unmöglich. Hier verlassen uns alle Hilfsmittel bis auf die Analysis.

60. Wir betrachten also jetzt das allgemeinste cyklische System, in welchem die Position aller Massentheilchen durch $\nu + 1$ cyklische Variablen l, l_1, $l_2 \ldots l_\nu$ und beliebige langsam veränderliche Parameter k_1, $k_2 \ldots k_n$ bestimmt ist. *Polycykeln.*

Der einfachste derartige Fall ist der, dass wir uns an Stelle der früher betrachteten zwei, jetzt $\nu+1$ Stromkreise denken und wieder annehmen, dass die Schwankungen der Stromintensität so langsam vor sich gehen, dass in jedem einzelnen derselben zu jeder beliebigen Zeit die Stromdichte für jedes Längen- und Querschnittselement gleich vorausgesetzt werden kann. Allein wir haben auch noch den allgemeineren Fall zu betrachten, dass die Stromintensität von Element zu Element wechselt. Es treten dann an Stelle der geschlossenen Stromkreise die einzelnen Stromelemente und l', l'_1, $l'_2 \ldots l'_\nu$ sind die Stromintensitäten in den verschiedenen Elementen.

3. Hypothese Corollar zur 2.: die in den Elementen thätigen Mechanismen sind, wie die der ganzen Ströme, den obigen Gleichungen unterworfen.

61. Freilich kann streng genommen wieder in einem einzigen Elemente unabhängig von allen anderen eine cyklische Bewegung dauernd nicht bestehen; nur verschwindend kurze Zeit ist die Elektricitätsbewegung in einem Stromelemente unabhängig von den umgebenden Elementen möglich. Allein gerade so, wie wir von einem Dielektricum annahmen, dass daselbst durch kurze Zeit eine wesentlich gleiche Bewegung stattfinden kann, wie sie im Leiter dauernd besteht, so wollen wir voraussetzen, dass auch bei rasch veränderlichen Strömen die Bewegung in jedem Elemente noch denselben Charakter hat, dass wir also auch auf sie die Gleichungen anwenden können, die wir für geschlossene Ströme fanden. Genau genommen geht unsere Voraussetzung nur dahin, dass auch bei ihnen, wie bei geschlossenen Strömen, in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft das undifferenziirte l nicht eingeht. Das über die langsam veränderlichen Parameter k, welche die Positionen der ponderablen Körper bestimmen, Gesagte gilt ja selbstverständlich jetzt ebenso wie früher, und andere Specialisirungen der allgemeinen Gleichungen der Mechanik haben wir bisher nicht eingeführt. Wir nehmen daher an, dass in den Stromelementen die gleichen, denselben Gleichungen unterworfenen Mechanismen thätig sind, wie in geschlossenen Strömen, wenn wir auch für einzelne Stromelemente den experimentellen Nachweis hierfür nicht direkt liefern können, da in einem einzelnen

Elemente für sich ein andauernder Strom nicht erhalten werden kann.

62. Natürlich bleibt dabei die Frage, ob bei sehr raschen (den Hertz'schen) Schwingungen nicht möglicherweise der Einfluss solcher das undifferenziirte l enthaltender, hier nicht berücksichtigter Glieder entdeckt werden könnte, eine offene und es ist gerade ein Hauptverdienst der Maxwell'schen Theorie, dass sie zahlreiche derartige Fragen aufwirft, welche zu neuen Experimenten anregen. (Jedenfalls muss sich die Elektricitätsbewegung den hier abzuleitenden Gleichungen nähern, wenn die Schwingungen nicht allzu rasch sind).

63. Mögen nun durch die $\nu + 1$ cyklischen Variablen die Zustände ebenso vieler geschlossener Ströme oder Stromelemente definirt sein, jedenfalls werden wir nicht alle $\nu + 1$ auf einmal überblicken können. Wir wollen daher von vorne herein nur eines davon ins Auge fassen und die Wirkung aufsuchen, welche gerade auf dieses Eine ausgeübt wird. Wir wollen das ins Auge gefasste kurz den Aufstrom nennen und darauf sollen sich die Buchstaben ohne Index beziehen. *Aufstrom.*

Alle übrigen sollen nur da sein, um das elektrische Feld zu definiren, in welchem sich unser Aufstrom befindet und es soll gefragt werden, welche Wirkung das durch die übrigen Ströme definirte Feld gerade auf den ins Auge gefassten Aufstrom ausübt.

64. Sei m^i irgend eine Masse des Systems, welches wir jetzt als Polycykel bezeichnen, deren Geschwindigkeit wieder: *Leb. Kraft des Polycykels.*

$$v^i = a^i l' + b^i{}_1 l'_1 + b^i{}_2 l'_2 \,.\,.\, + b^i{}_\nu l'_\nu, \; (i = 1, 2, 3 \,.\,.\, p)$$

sei. Dann ist:

$$\frac{m^i (v^i)^2}{2} = \frac{m^i (a^i)^2}{2} l'^2 + m^i a^i l' (b_1{}^i l'_1 + b_2{}^i l'_2 + \,.\,.\, b^i{}_\nu l_\nu) + M.$$

M und N sollen Grössen sein, welche das l' ohne Index nicht enthalten. Hiernach ist:

4*

$$T = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{m^i (v^i)^2}{2} = \frac{l'^2}{2} \sum_{i=1}^{i=p} m^i (a^i)^2$$

$$+ l' \sum_{i=1}^{i=p} m^i a^i (b_1{}^i l'_1 + b_2{}^i l'_2 + \,.\,.\, b_\nu{}^i l'_\nu) + N$$

$$= \frac{l'^2}{2} \sum_{i=1}^{i=p} m^i (a^i)^2 + l' \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{h=1}^{h=\nu} m^i a^i b_h{}^i l'_h + N.$$

Wir wollen nun vorläufig den Aufstrom, gleichgültig, ob wir uns darunter einen geschlossenen Strom oder ein Stromelement vorstellen, mit s, die Doppelsumme mit $J(s)$, die einfache Summe mit A bezeichnen, also setzen:

24) $$A = \sum_{i=1}^{i=p} m^i (a^i)^2, \qquad J(s) = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{h=1}^{h=\nu} m^i a^i b^i{}_h l'_h.$$

so dass:

25) $$T = \frac{A}{2} l'^2 + l' J(s) + N$$

wird. Für zwei Ströme ist l, l_1, $J(s)$ mit dem identisch, was dort mit l_1, l_2 und $l'_2 \, C$ bezeichnet wurde.

Wovon hängt das Moment eines Stromes ab?

65. Die Grösse $J(s)$ bezeichnen wir als das Moment unseres Stromes s in dem gegebenen Felde. Diese Grösse ist offenbar abhängig: 1. Von der Natur des Feldes, also der Intensität und Lage sämmtlicher anderer Ströme. 2. Von der Gestalt und Lage des Aufstroms, aber nicht mehr von der Stromintensität in demselben, da ja l' vor das Summenzeichen herausgehoben wurde. Es ist also bei der Definition des Begriffs des Momentes von der Stromintensität im Aufstrome vollkommen abstrahirt. Der Aufstrom ist dabei nur als eine im gegebenen Felde liegende geometrische Curve aufzufassen.

Moment eines Curvenelementes und einer Curve.

Wir können in ein beliebiges Feld ein beliebiges Element einer Curve legen. Wenn dieses Element ein Stromleiter wäre, würde ihm immer im Felde ein bestimmtes Moment zukommen, welches wir einfach das Moment dieses Curvenelementes im gegebenen Felde nennen. Jedem Curvenelemente kommt in jedem Felde ein bestimmtes Moment zu und nach dem Späteren kommt daher auch jeder unge-

schlossenen oder geschlossenen Curve ein Moment zu, welches einfach die Summe der Momente ihrer Elemente ist.

66. Aber eins ist zu bemerken: Die Erfahrung lehrt, dass der elektrische Strom immer eine bestimmte Richtung hat. Um diese eindeutig zu definiren, müssen wir eine bestimmte Richtung im Stromleiter s als positiv annehmen. Je nachdem die Strömungsrichtung der positiven Elektricität mit derselben zusammenfällt oder ihr entgegengesetzt ist, ist dann l' mit dem positiven oder negativen Zeichen zu versehen. *6. Erfahrungssatz: der Strom hat eine Richtung.*

Aendern wir nichts, als dass wir die entgegengesetzte Richtung von s positiv wählen, so ändert sich daher nichts als das Zeichen von l'; daher bleiben auch in unseren Formeln alle Grössen unverändert; nur die Coëfficienten a^i, welche mit der ersten Potenz von l' multiplicirt erscheinen, ändern ihr Zeichen, während alle Coëfficienten b unverändert bleiben.

Es folgt daraus, dass A und N unverändert bleiben, während $J(s)$ lediglich sein Zeichen wechselt. Wir wollen dies letztere symbolisch dadurch ausdrücken, dass wir schreiben:

26) $$J(-s) = -J(s).$$

Diese Gleichung folgt übrigens schon daraus, dass durch die blosse Uebereinkunft, die entgegengesetzte Richtung von s als positiv zu wählen, sich unmöglich der Werth der lebendigen Kraft T ändern kann. Da aber hierdurch im Ausdrucke 25) nur l' sein Zeichen ändert, so muss auch dessen Coëfficient $J(s)$ das Zeichen wechseln, während A und N ungeändert bleiben.

67. Wir finden nun für die elektromotorische Kraft, die in unserem Aufstrome wirkt, wenn noch die Bewegungshindernisse die Gegenkraft W ausüben nach Gleichung 8, Art. 36, den Werth: *Elektromotorische Kraft im Aufstrom.*

27) $$L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'} + W = \frac{d(A l')}{dt} + \frac{dJ(s)}{dt} + W.$$

Denken wir uns nun das Feld sammt seinen Veränderungen gegeben und betrachten bloss die elektromotorische Kraft $L(s)$, welche zur Ueberwindung des Wider-

standes und der durch die Veränderungen des Feldes in unserem Aufstrome erzeugten Induktion erforderlich ist (d. h. bloss das 2. und 3. Glied der Gleichung 27. Wir betrachten also 1. nicht die Wirkung auf die anderen Ströme des Feldes, 2. aber auch nicht die elektromotorische Kraft, welche der Aufstrom in sich selbst erzeugt und welche durch das erste Glied der Gleichung 27 ausgedrückt wird. Dann ist also:

28) $$L(s) = \frac{dJ(s)}{dt} + W.$$

Es kann übrigens das weggelassene Glied der Gleichung 27 unter verschiedenen Verhältnissen an sich schon gegen die übrigen vernachlässigt werden, so dass das mittlere Glied der Gleichung 27 überhaupt die gesammte im Aufstrome inducirte elektromotorische Kraft angiebt. Dies tritt ein: 1. wenn die Stromintensität im Aufstrome sehr klein ist. Dann ist l' sehr klein und das erste Glied verschwindet gegen das zweite. Physikalisch ausgedrückt: der Aufstrom ist so schwach, dass er selbst nur verschwindend wenig zur Charakteristik des Feldes beiträgt; diese und daher auch die im Aufstrome inducirte elektromotorische Kraft rührt fast ausschliesslich von den übrigen Strömen des Feldes her. 2. Dasselbe gilt aber auch, wenn der Aufstrom nur ein verschwindender Theil des Feldes, also nur ein Stromelement ist. Dann verschwindet, auch wenn die Stromintensität darin beliebig ist, eo ipso die von ihm erzeugte Wirkung gegenüber der durch das ganze übrige Feld hervorgerufenen und der in Gleichung 28 angegebene Werth von $L(s)$ liefert die ganze elektromotorische Kraft L in s.

Moment einer Summe (Consequenz).

68. Hat l' in mehreren sich aneinander schliessenden Theilen eines Stromleiters denselben Werth, wie dies jedenfalls in einer geringen Zahl sich unmittelbar folgender Längenelemente desselben Stromes angenommen werden kann[1]), so ist offenbar die Gesammtkraft $L(\Sigma s)$, welche durch das Feld in s inducirt wird, gleich der Summe $\Sigma L(s)$ der Kräfte $L(s)$, die in den einzelnen Stromleitern wirken. Ist

---

[1]) Diese Bedingung ist übrigens für die späteren Consequenzen nicht einmal nothwendig, da das Moment J gar nicht von l' abhängt.

$J(s)$ das Moment eines solchen Theiles, $J(\Sigma s)$ das Moment des Inbegriffs aller Theile, so hat man:

$$L(s) = \frac{dJ(s)}{dt}, \qquad L(\Sigma s) = \frac{dJ(\Sigma s)}{dt},$$

daher, da man jedenfalls annehmen kann, dass für $t = -\infty$, $J(s) = J(\Sigma s) = o$ ist:

29) $$J(\Sigma s) = \Sigma J(s).$$

Das Moment eines Inbegriffs mehrerer Stromtheile ist also die Summe der Momente der einzelnen Theile.

$J(ds)$ ist proportional ds.

Ist $J(ds)$ das Moment eines Elementes ds und theilt man dies noch in mehrere (n) kleinere gleich lange und gleichbeschaffene Elemente $d\sigma$, so kann das Moment jedes $d\sigma$ gleich angenommen werden. Es ist also $J(ds) = nJ(d\sigma)$, d. h. es ist $J(ds)$ proportional der Länge ds, daher:

$$J(ds) = E ds,$$

$J(s) = \int J ds$, J als Linienintegral.

wobei E eine endliche Grösse ist. Dies folgt übrigens auch schon daraus, dass nach Gleichung 29 das Moment eines endlichen Stromes:

30) $$J(s) = \int J(ds)$$

ist, wobei das Integral über alle Stromelemente zu erstrecken ist, was nur unter der Bedingung, dass E im Allgemeinen endlich ist, einen allzeit endlichen Werth liefert.

Ponderomotorische Kraft auf den Aufstrom.

69. Sei k irgend ein Parameter, welcher theils die Position des Aufstroms, theils aber auch die solcher Körper bestimmt, in welche die vom Aufstrome erzeugte Bewegung übergreift. Natürlich wird möglicherweise auch noch die Lage anderer Ströme des Feldes durch diesen Parameter bestimmt sein.

Die Kraft K, welche auf k von aussen wirken muss, um es constant oder in der durch die Gleichungen ausgedrückten Weise langsam veränderlich zu erhalten, ist dann nach Gleichung 6, Art. 31:

$$K = -\frac{\partial T}{\partial k} = -\frac{l'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial k} - l'\frac{\partial J(s)}{\partial k} - \frac{\partial N}{\partial k}.$$

Hier rührt das erste Glied von der Wirkung des Aufstroms auf sich selbst, das letzte von der Wirkung her, die auf die übrigen Ströme des Feldes ausgeübt wird. Die

Wirkung des Feldes auf den Aufstrom, welche wir jetzt einzig und allein betrachten und mit $K(s)$ bezeichnen, ist daher lediglich durch das zweite Glied bestimmt.

Ist die Stromintensität l' im Aufstrome sehr klein oder der Aufstrom nur ein unendlich kleines, daher verschwindendes Element des ganzes Feldes, so verschwindet das erste Glied. Es ist also dann die gesammte ponderomotorische Kraft, welche in Folge der Wirkung auf unseren Aufstrom auf den Parameter k wirkt:

31) $$K(s) = -l' \frac{\partial J(s)}{\partial k}.$$

Wenn sich alle Parameter k um δk ändern, ist daher die gesammte Arbeit der ponderomotorischen Kräfte

32) $$\sum K(s)\, \delta k = -\sum l' \frac{\partial J(s)}{\partial k}\, \delta k = -l'\, \delta J(s).$$

Da alle Ströme in einander greifen und das Zusammenwirken aller erst den Zustand des Feldes bestimmt, so lässt sich eigentlich nicht scharf unterscheiden, welcher Theil der auf k wirkenden ponderomotorischen Kraft von dem einen, welcher von dem anderen Strome herrührt, falls durch den Parameter k die Positionen mehrerer Ströme gleichzeitig bestimmt sind, allein wir wissen, dass, wenn wir den Ausdruck 31 für jedes Stromelement des Feldes bilden (wo das früher besprochene erste Glied verschwindet) und dann alle so gewonnenen Ausdrücke $K(s)$ addiren, wir sicher die auf k wirkende Gesammtkraft richtig erhalten. In diesem Sinne eben wollen wir diesen Ausdruck als denjenigen Theil der Gesammtkraft betrachten, welcher von unserem Strome geliefert wird. Daraus folgt natürlich wieder:

$$K(\Sigma s) = \Sigma K(s) \quad \text{und} \quad J(\Sigma s) = \Sigma J(s).$$

Elektrokinetische Energie des Aufstroms.

70. Gleiches gilt von der gesammten lebendigen Kraft oder, wie wir deutlicher sagen, von der elektrokinetischen Energie des Systems; dieselbe ist:

$$T = \frac{l'}{2}\frac{\partial T}{\partial l'} + \frac{l'_1}{2}\frac{\partial T}{\partial l'_1} + \frac{l'_2}{2}\frac{\partial T}{\partial l'_2} + \cdots$$

Wir erhalten daher jedenfalls wieder die gesammte elektrokinetische Energie richtig, wenn wir den Ausdruck:

$$\frac{l'}{2}\frac{\partial T}{\partial l'} = \frac{l'\lambda}{2}.$$

für jeden der Ströme resp. jedes der Stromelemente des ganzen Feldes bilden und alle diese Ausdrücke zum Schlusse addiren. Wir können jedem der Ströme gerade diese elektrokinetische Energie $l'\lambda:2$ zuschreiben und wollen dies den Betrag nennen, welchen gerade dieser Strom zur elektrokinetischen Energie beiträgt, und mit $T(s)$ bezeichnen.

Dies ist freilich wieder in gewisser Beziehung willkürlich, da ja die elektrokinetische Energie nur durch das Zusammenwirken aller Ströme entsteht. Es lässt sich also nicht strenge unterscheiden, welchen Beitrag jeder einzelne Strom dazu liefert. Aber soviel ist wieder sicher: wenn wir jedem Theile diese elektrokinetische Energie $T(s)$ zuschreiben und dann die allen zugeschriebene elektrokinetische Energie addiren, so liefert die Summe die richtige Gesammtenergie des Feldes. Es ist also:

$$T(s) = \frac{l'}{2}\frac{\partial T}{\partial l'} = \frac{l'}{2}[Al' + J(s)].$$

Ist wieder entweder l' sehr klein oder zählen wir die Elemente des Stromleiters einzeln auf, so dass s ein einzelnes Element bedeutet, welches für sich allein jedenfalls nur verschwindend wenig zum Gesammtcharakter des Feldes beitragen kann, so verschwindet das erste Glied und es bleibt:

33) $$T(s) = \frac{l'}{2}J(s).$$

Achte Vorlesung.

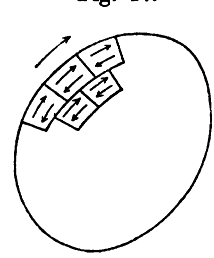
Eigenschaften des Momentes. Stokes' Satz.

---

71. Sei das Moment irgend einer geschlossenen Curve s zu bestimmen, wobei natürlich eine Umkreisungsrichtung derselben als die positive gegeben sein muss. Wir denken uns eine beliebige ebene oder gekrümmte Fläche Φ, deren Contur jene geschlossene Curve ist und zerlegen diese Fläche in unendlich viele unendlich kleine Flächenelemente $d\varkappa$. *J als Flächenintegral (Consequenz).*

Da jede im Felde liegende Curve ein Moment hat, so muss auch die Contur jedes Flächenelementes $d\varkappa$ ein bestimmtes Moment haben, welches wir mit $J(d\varkappa)$ bezeichnen wollen, wobei natürlich jedes $d\varkappa$ in demselben Sinne, wie s umkreist werden muss. $J(\Phi)$ oder $\int J(d\varkappa)$ sei die Summe der Momente aller dieser in die Curve s eingezeichneten kleinen Conturen. Nach Gleichung 30 kann man aber die Contur jedes Flächenelementes $d\varkappa$ wieder in sehr viele Linienelemente zerlegen und nach Gleichung 26 heben sich in der Summe $\int J(d\varkappa)$ die Momente aller im Innern der Curve s liegenden Linienelemente auf, da jedes derselben einmal in dem einen, das andere Mal im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird; die Elemente aber, welche in der Contur der Fläche Φ liegen, liefern zusammen $J(s)$. (S. Fig. 17.)

Fig. 17.



Es lässt sich also $J(s)$, ebenso gut, wie durch das Linienintegral $\int J(ds)$, auch durch ein Flächenintegral darstellen. Es ist:

34) $$J(s) = \int J(d\varkappa),$$

woraus selbstverständlich folgt, dass $J(d\varkappa)$ unendlich klein wie $d\varkappa$, also von der Form $E'd\varkappa$ sein muss, wobei E' endlich ist, obwohl es, wenn als Linienintegral dargestellt, in der Form eines Integrals erscheint, das über eine Curve erstreckt ist, deren Länge klein von der Ordnung ds ist.

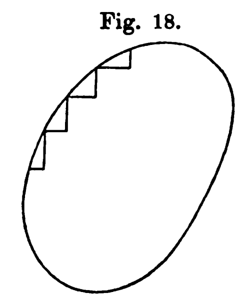
Wenn $J(s)$ als ein über die Fläche Φ erstrecktes Flächenintegral $\int E'\,d\varkappa$ ausgedrückt erscheint, soll es immer mit $J(\Phi)$ bezeichnet werden, ein Werth, welcher natürlich alle Mal nur von der Contur der Fläche Φ und dem Sinne, in welchem diese gezogen gedacht wird, nicht von der übrigen Gestalt der Fläche Φ abhängt.

Componenten des Momentes J. (Consequenz.)

72. Wir betrachten dieselbe geschlossene Curve, wie im vorigen Abschnitte, beziehen sie auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem und zerlegen sie in unendlich viele Curvenelemente ds. Jedes derselben ersetzen wir durch eine geradgebrochene Linie, deren drei Stücke dx, dy, dz parallel den drei Coordinatenaxen sind, während der An-

fangspunkt des ersten und Endpunkt des letzten mit dem Anfangspunkte und Endpunkte von ds zusammenfällt. (In Fig. 18 für einen in einer der Coordinaten-Ebenen liegenden Strom gezeichnet). Den Inbegriff aller dx, dy und dz nennen wir die geradgebrochene Linie s'. Sei s die Contur einer Fläche Φ, s' die einer anderen Fläche Φ', welche sonst überall mit Φ zusammenfallen, nur am Rande entsprechend der dort zu erfüllenden Bedingung unendlich wenig abweichen soll. Es ist also dann:

Fig. 18.



$$J(s) = J(\Phi), \qquad J(s') = J(\Phi').$$

Nun weichen aber die beiden Flächen Φ und Φ' nur in Flächenelementen von einander ab, deren Summe einen unendlich kleinen Flächeninhalt liefert. Das Moment der unendlich kleinen Curven, die aus den vier Elementen ds, dx, dy, dz bestehen, muss nach dem Bewiesenen unendlich klein, wie der davon umschlossene Flächenraum sein; daher muss auch das Moment der Gesammtfläche, um welche Φ und Φ' verschieden sind, unendlich klein sein und der Unterschied zwischen $J(\Phi)$ und $J(\Phi')$ verschwinden. Geht man daher zu wirklichen Differenzialen über, so wird $J(\Phi) = J(\Phi')$ und daher auch $J(s) = J(s')$.

Bei Berechnung des Momentes kann also jedes Linienelement ds ersetzt werden durch seine drei Projectionen dx, dy, dz auf die drei Coordinatenaxen.

Sind die Momente dieser drei Projectionen Fdx, Gdy, Hdz, so ist also:

35) $$J(ds) = Fdx + Gdy + Hdz.$$

73. Da das Moment nur von der Natur des Feldes und der Gestalt und Lage des Aufstroms abhängt, so können F, G, H überhaupt nur mehr von der Natur des Feldes und der Lage des Punktes abhängen, durch welche das Element ds gelegt wurde. Man kann also von jedem Punkte des Feldes aus eine Gerade $\mathfrak{A}$ ziehen, deren Projectionen *Momentenvektor.*

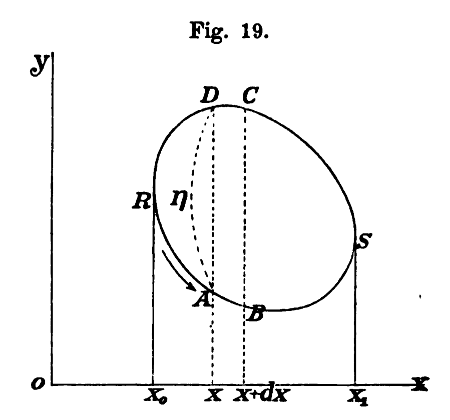
auf die drei Coordinatenaxen gleich den Werthen von F, G und H in dem betreffenden Punkte sind. Diese Gerade nennen wir den Momentenvector des betreffenden Punktes und das Moment eines durch diesen Punkt gezogenen Linienelementes ds ist dann nach Formel 35:

36) $$J(ds) = \mathfrak{A}\, ds \cos(\mathfrak{A}, ds).$$

Coordinatensystem mit Rechtsschraubendrehung (Weinrankendrehung).

74. Es soll jetzt speciell s die Contour eines unendlich kleinen Flächenelementes $d\varkappa$ sein und $J(d\varkappa)$ nach Formel 30 und 35 berechnet werden. Damit keine Zweideutigkeit in der Bestimmung der Umlaufsrichtung eintrete, soll unser Coordinatensystem so gewählt werden, dass die positive y-Axe durch eine solche Drehung auf kürzestem Wege in die Lage der positiven z-Axe übergeht, wie sie eine gewöhnliche rechtsläufige in der positiven X-Richtung in einer fixen Mutter fortschreitende Schraube macht, also für ein auf der positiven X-Seite befindliches Auge dem Sinne des Uhrzeigers entgegen.[1]) Dasselbe soll für die beiden anderen Coordinatenaxen gelten, wenn x, y und z cyklisch vertauscht werden. Man erhält ein solches Coordinatensystem, wenn man die positive X-Axe nach vorn, die positive Y-Axe nach rechts, die positive Z-Axe nach oben zieht.

Fig. 19.



Stokes' Satz in der Ebene.

75. Liegt zunächst das Flächenelement $d\varkappa$ in der xy-Ebene Fig. 19, wo die z-Axe gegen den Beschauer hingerichtet zu denken ist, so

[1]) Maxwell schlägt (treat. on el. vol. I art. 22) vor, dies ein Weincoordinatensystem zu nennen, da sich die Weinranke im selben Sinne windet, wenn die positive Coordinatenaxe die aufsteigende Stange ist. Das entgegengesetzte heisst dann „Hopfencoordinatensystem."

reducirt sich $J(d\varkappa)$ auf $\int(Fdx) + Gdy)$, was über die Contur von $d\varkappa$, die krumme Linie der Fig. 19 zu erstrecken ist.

Sei x_0 der kleinste Werth von x, welcher einem Punkte R dieser Contour zukommt, x_1 der grösste der dem Punkte S zukommen soll, x und $x + dx$ seien zwei beliebige Werthe von x, von denen der erste den beiden Punkten A und D, der letzte den beiden Punkten B und C der Contur zukommt. Dann ist:

$$\int Fdx = \int_{RABS} Fdx - \int_{RDCS} F'dx,$$

wobei F' irgend einen Werth des F in dem oberen Theile der Contur bezeichnet. Fassen wir das auf das Längendifferenziale AB bezügliche Element des ersten Integrales mit dem auf das Längendifferenzial DC des zweiten bezüglichen zusammen und ebenso das auf jedes Längendifferenzial bezügliche Element des ersten Integrals mit demjenigen Elemente des zweiten Integrals, das sich auf das vertikal darüber liegende Längendifferenzial bezieht, so wird:

$$\int Fdx = \int_{x_0}^{x_1} (F - F')\,dx.$$

Wird die Ordinatendifferenz je zweier vertikal übereinander liegender Längendifferenziale mit η bezeichnet, so ist:

$$F' = F + \eta \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Da aber die ganze Contur nur unendlich klein ist, so kann $\partial F : \partial y$ für jeden Punkt derselben constant betrachtet und vor das Integralzeichen gesetzt werden. Da ferner:

$\int_{x_0}^{x_1} \eta\,dx$ gleich dem Inhalte $d\varkappa$ der von der Contur umschlossenen Fläche ist, so hat man:

$$\int Fdx = -\frac{\partial F}{\partial y} d\varkappa.$$

Genau ebenso findet man:

$$\int G\,dy = + \frac{\partial G}{\partial x} d\varkappa,$$

daher:

37)
$$J(s) = \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) d\varkappa.$$

Stokes' Satz im Raume.

76. Hieraus kann leicht der allgemeine Fall, dass $d\varkappa$ beliebig im Raume liegt, abgeleitet werden. Wir legen dann drei neue Coordinatenaxen (die der ξ, η, ζ), so dass die beiden ersten dem $d\varkappa$ parallel, die letzte darauf senkrecht ist und sich gegen die angenommene Umkreisungsrichtung von $d\varkappa$ so verhält wie die alte z-Axe zur Ueberführung der positiven x-Axe in die positive y-Axe auf kürzestem Wege (dass die Umkreisungsrichtung eine Weindrehung um die positive 0ζ-Richtung ist). Ausserdem sollen die drei neuen positiven Coordinatenaxen gegenüber den drei alten congruent sein. (Es sollen wieder Weincoordinaten sein.) Ist wieder $\mathfrak{A}$ der Vektor, dessen Componenten F, G, H sind, so hat man zunächst:

$$\int(F dx + G dy + H dz) = \int ds\, \mathfrak{A} \cos(\mathfrak{A}, ds) = \int(\Phi d\xi + \Psi d\eta),$$

wenn Φ und Ψ die Componenten des Vektors $\mathfrak{A}$ nach der neuen x- und y-Axe sind. Letzterer Werth ist aber nach dem soeben bewiesenen gleich:

38)
$$d\varkappa\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right).$$

Ferner hat man bekanntlich, wenn die Cosinus der Winkel je zweier Coordinatenaxen nach dem beistehenden Schema bezeichnet werden:

	x	y	z
ξ	α	β	γ
η	α'	β'	γ'
ζ	α''	β''	γ''

$$\Phi = \alpha F + \beta G + \gamma H, \qquad \Psi = \alpha' F + \beta' G + \gamma' H,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = \alpha' \frac{\partial}{\partial x} + \beta' \frac{\partial}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial}{\partial z}.$$

Substituirt man dies in den Ausdruck 38, so fällt $\partial F:\partial x$, $\partial G:\partial y$ und $\partial H:\partial z$ ganz heraus, die Grösse:

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

erscheint mit $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\,d\varkappa = \gamma'' d\varkappa = d\nu$ [1]) multiplicirt, wobei $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ die Projectionen von $d\varkappa$ auf die drei Coordinatenebenen sind. Fällt die Umkreisungsrichtung von $d\varkappa$, sobald es um einen spitzen Winkel in die yz-Ebene gedreht wird, mit derjenigen Drehung um 0 zusammen, welche die positive y-Axe auf kürzestem Wege in die positive z-Axe überführt, ist also γ'' positiv, so ist auch $d\nu$ positiv, sonst negativ zu bezeichnen. Da die übrigen Glieder des Ausdrucks 38 durch cyklische Vertauschung aus dem eben betrachteten folgen, so ergiebt sich schliesslich:

Vector, Componenten und Gleichungen der magnetischen Induktion.

39) $$\begin{cases} J(s) = J(d\varkappa) = \int(F dx + G dy + H dz) \\ = a d\lambda + b d\mu + c d\nu = \mathfrak{B} d\varkappa \cos(\mathfrak{B}, n), \text{ wobei:} \end{cases}$$

40) $$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \qquad b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

aus einem uns noch freilich verborgenen Grunde die Componenten der magnetischen Induktion genannt werden sollen. Die Gleichungen selbst sollen die Gleichungen der magnetischen Induktion heissen, und zwar nach ihrer Ableitung die Stokes'schen. (Das Wort Influenz wäre freilich im Gegensatz zur faradischen Induktion passender.) $\mathfrak{B}$ ist der Vektor (Induktionsvektor), dessen Projectionen auf die drei Coordinatenaxen gleich a, b, c sind. Die nach derselben Seite, wie früher 0ζ gerichtete Normale zu $d\varkappa$ wurde jetzt mit n bezeichnet. Umschliesst s eine endliche Fläche, so wissen wir bereits, dass $J(s)$ die Summe aller $J(d\varkappa)$ Flächenelemente derselben ist, also:

41) $$\begin{cases} J(s) = \int(F dx + G dy + H dz) = \int J(d\varkappa) \\ = \int(a d\lambda + b d\mu + c d\nu) = \int \mathfrak{B} d\varkappa \cos(\mathfrak{B}, n). \end{cases}$$

Will man diese Gleichung lieber rein geometrisch, aus der Gleichung 37 ableiten, so verfahre man wie folgt: Man construire ein unendlich kleines Tetraëder, von dessen Kanten drei, die sich in der Spitze 0 treffen, den drei Coordi-

---

[1]) **Kirchhoff**, Vorlesungen über math. Physik 3. Aufl. S. 41 u. 42.

natenaxen parallel sind; die 0 gegenüberliegende Fläche des Tetraëders sei $d\varkappa$, die anderen drei Seitenflächen $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$. Man sieht sofort, dass $J(d\varkappa) = J(d\lambda) + J(d\mu) + J(d\nu)$ ist, da sich in der letzten Summe die Integrale über die in 0 zusammenstossenden Tetraëderkanten aufheben. Berechnet man $J(d\lambda)$, $J(d\mu)$ und $J(d\nu)$ nach Formel 37, so hat man sofort die Formel 39) für das Tetraëder. Man kann aber jede von irgend einer Curve s umschlossene Fläche Φ in lauter Dreiecke zerlegen, welche die Eigenschaften des obigen Dreiecks $d\varkappa$ haben (Fig. 20). Man lege unendlich viele Ebenen in unendlich kleinen Abständen parallel der xy-Ebene. Diese sollen die Fläche Φ der Reihe nach in den Curven C_1, C_2, C_3 ... schneiden. Durch einen Punkt P_1 auf C_2 lege man zwei Ebenen parallel der xz- und yz-Ebene; diese schneiden im Vereine mit der Curve C_1 ein Dreieck aus der Fläche s aus; sie sollen die Curve C_1 in P_2 und P_3 schneiden. Man legt dann wieder durch P_2 eine der yz-, durch P_3 eine der xz-Ebene parallele Ebene; schneiden diese die Curve C_2 in P_4 und P_5, so legt man wieder durch P_4 eine der xz-, durch P_5 eine der yz-Ebene parallele Ebene u. s. f. So wird die Fläche Φ in lauter Dreiecke von der gewünschten Form zerlegt und man erhält auch die Gleichung 41.

Fig. 20.

Will man hinwiederum die Gleichung 39 ohne den Umweg über die Gleichung 37 ableiten, so lege man $d\varkappa$ so im Raume, dass die im oben definirten Sinne dazu gezogene Normale n mit den drei positiven Coordinatenaxen spitze Winkel bildet (Fig. 21). Man zeichne auch die Projectionen $d\nu$ und $d\lambda$ von $d\varkappa$ auf die xy- und yz-Ebene; endlich lasse man eine Ebene E parallel der xz-Ebene fortwandern; ihre y-Coordinate sei y_0, wenn sie die Contur von $d\varkappa$ zum ersten Male berührt, y_1 wenn ihr Durchschnitt mit der Contur wieder aufhört; in zwei Zwischenlagen, die einander unendlich benachbart sind, aber habe sie die y-Coordinaten y und $y + dy$. Wir nennen daher diese Lagen kurz die Lagen y und $y + dy$. Die Ebene E schneide in

der Lage y die Contur von $d\varkappa$ in den Punkten A und B. Es ist nun:

$$\int G\,dy = \int_{y_0}^{y_1} (G_B - G_A)\,dy.$$

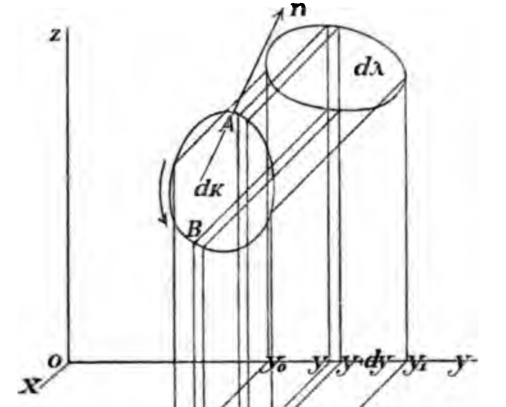
Habe A die Coordinaten x, y, z dagegen B die Coordinaten $x + \xi$, y, $z - \zeta$; so ist also:

$$G_B = G_A + \xi \frac{\partial G}{\partial x} - \zeta \frac{\partial G}{\partial z} \qquad \text{daher:}$$

$$\int G\,dy = \frac{\partial G}{\partial x} \int_{y_0}^{y_1} \xi\,dy - \frac{\partial G}{\partial z} \int_{y_0}^{y_1} \zeta\,dy = \frac{\partial G}{\partial x}\,d\nu - \frac{\partial G}{\partial z}\,d\lambda.$$

Da $\int H dz$ und $\int F dx$ durch cyklische Vertauschung gewonnen werden, so ist hiermit die Formel 39 erwiesen. Die Formeln 39 und 41 gelten mit unveränдертem Zeichen für Hopfencoordinaten, wenn in denselben die Hopfendrehung als positive Drehung gewählt wird, d. h. also die Drehung von der positiven x-Axe auf kürzestem Wege gegen die positive y-Axe (also von der positiven z-Axe gesehen im Sinne des Uhrzeigers; entgegen einer gewöhnlichen Schraube, die in einer fixen Mutter in Richtung der wachsenden z fortschreitet). Natürlich muss dann auch die Normale n so gelegt werden, dass, wenn sie eine Hopfenstange und $d\varkappa$ der Erdboden wäre, die Drehung der Hopfenranke die gewählte Umkreisungsrichtung von $d\varkappa$ wäre. Wir aber wollen uns, entgegen sonstiger

Fig. 21.



Münchener Art, hier unter Verschmähung des Hopfens stets an den Wein halten.

Ich bemerke noch, dass unsere Beweise rein geometrische waren, dass also in Gemässheit der Gleichungen 39 und 41 die Relation:

$$
42)\quad \left\{\begin{aligned} &\int (F dx + G dy + H dz) = \int d\varkappa \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)\cos(nx)\right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\cos(nz)\right] \end{aligned}\right.
$$

stets besteht, wenn F, G, H beliebige Funktionen von x, y, z, ferner $d\varkappa$ ein beliebiges Flächenelement und n seine Normale ist und die Integration für Weincoordinaten wein-, für Hopfencoordinaten hopfenwendig über die Contur von $d\varkappa$ erstreckt wird.

77. Da ich die vorliegende Theorie die Maxwell'sche nannte, muss ich es entschuldigen, wenn ich im folgenden von Maxwell's Wege abweiche. Dieser betrachtet nämlich nun sogleich den Magnetismus, wodurch es den Anschein gewinnt, als ob derselbe als ein von der Elektricität verschiedenes Agens betrachtet würde. Um jeden derartigen Schein zu vermeiden, wollen wir dagegen zunächst bloss von Solenoiden sprechen.

Fig. 22.

Solenoide. Wir dachten uns bisher die kleinen Ströme $d\varkappa$ so angeordnet, dass sie mit ihren Conturen aneinanderstossen. Wir wollen jetzt eine andere, die perlschnur-, rosenkranzartige oder solenoide Anordnung derselben betrachten. Sei eine beliebige Curve SN Fig. 22 durch beliebig viele äquidistante Punkte $(A, B, C..)$, von denen ν auf die Längeneinheit entfallen, in sehr kleine Elemente $dS = AB = BC \ldots = 1 : \nu$ getheilt. Eine gleiche Zahl congruenter

Scheibchen von sehr kleinem (nicht vielleicht gerade unendlich kleinem) Flächeninhalte $d\varkappa$ werde so angeordnet, dass alle senkrecht zur Curve und ihre Schwerpunkte in $A, B, C\ldots$ liegen. Die Contur eines jeden Scheibchens werde von einem elektrischen Strome von der (für jedes Scheibchen gleichen) Intensität l'_S durchflossen, und zwar weinwendig, d. h. da wir uns die Curve SN (und ebenso ihre Längenelemente dS) von S gegen N gerichtet denken, dem Sinne des Uhrzeigers entgegen, wenn das Auge vom Punkte N auf die Scheibchen blickt.

Das ganze System heisse das Solenoid S, welcher Buchstabe zugleich die Länge der Mittellinie SN des Solenoides bezeichnet. Befindet sich dasselbe in einem beliebig gegebenen elektrischen Felde, so ist das Moment des Stromes, welcher ein Scheibchen umkreist nach Formel 39 d. vor. Art.:

$$J(d\varkappa) = d\varkappa[a\cos(dS, x) + b\cos(dS, y) + c\cos(dS, z)].$$

Bezeichnet man die Projectionen des Elementes dS der Mittellinie auf die drei Coordinatenaxen mit dx, dy, dz, so ist wegen $dS = 1 : \nu$

$$J(d\varkappa) = \nu d\varkappa(adx + bdy + cdz).$$

Das Moment des ganzen Solenoides ist nach Gleichung 29 Art. 68:

43) $$J(S) = \nu d\varkappa \int (adx + bdy + cdz),$$

wobei die Integration von dem Anfangspunkte S bis zum Endpunkte N der Mittellinie zu erstrecken ist.

Es ist wichtig zu bemerken, dass a, b, c bloss von der Beschaffenheit des Feldes, in welchem sich das Solenoid befindet, dagegen die übrigen Grössen bloss von der Beschaffenheit des Solenoides abhängen, bis auf J, worin beiderlei Grössen gemischt vorkommen. Setzen wir:

44) $$\int (adx + bdy + cdz) = \varphi,$$

also:

45) $$a = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \; b = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \; c = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

so wird auch φ bloss von der Natur des Feldes, dem angenommenen Anfangswerthe und, wenn es kein vollständiges Differentiale sein sollte, vom Integrationswege abhängen. Es ist dann einfach: $J(S) = \nu \varphi d\varkappa$.

7. Erfahrungssatz. Auf geschlossene Solenoide wirkt keine Kraft.

78. Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $-l'_S$ und differentirt partiell nach den Coordinaten, welche Gestalt und Lage der Mittellinie des Solenoides bestimmen, so erhält man nach Gleichung 31 Art. 69 die ponderomotorischen Kräfte, welche im gegebenen Felde auf das Solenoid wirken. Wir nehmen nun als durch die Erfahrung gegeben an, dass auf geschlossene Solenoide, d. h. auf solche, für welche die beiden Punkte N und S zusammenfallen, in einem homogenen Medium niemals eine Kraft wirkt, wenn die Ströme des Feldes nicht durch die Scheibchen des Solenoides hindurchfliessen. Daraus folgt also, dass alle Differentialquotienten von φ nach allen, Gestalt und Lage der Mittellinie bestimmenden Variabeln Null sind; dass φ für ein geschlossenes Solenoid eine von Gestalt und Lage der Mittellinie vollkommen unabhängige Constante ist.

Wenn die Mittellinie des Solenoids nicht von den dem Felde angehörigen elektrischen Strömen umschlossen wird, so muss diese Constante gleich Null sein. Denn dann kann das Solenoid, ohne Ströme des Feldes zu durchkreuzen, in unendliche Entfernung gebracht werden. Wir nehmen aber an, dass in unendlicher Entfernung jede Wirkung des Feldes aufhört, dass also dort J, welches ja nach seiner Definition die Wechselwirkung zwischen Feld und Solenoid misst und nur Glieder enthält, die von dem Zusammenwirken beider abhängen, Null ist. Wäre das Solenoid ganz in einer von Elektricität durchströmten Schale eingeschlossen, so könnte ohne erhebliche Störung des Feldes in diese immer ein unendlich kleines Loch gemacht werden, durch welches das auf eine einzige Linie zusammengeschobene Solenoid hinaus und in unendliche Entfernung gebracht werden könnte.

Wird dagegen die Mittellinie des Solenoids von einem oder mehreren Strömen des Feldes umschlossen, so kann dasselbe nicht ohne Zerreissung oder Durchkreuzung in unendliche Entfernung gebracht werden; dann braucht φ nicht gleich Null zu sein, bleibt aber noch immer constant, wenn die Mittellinie ihre Gestalt beliebig ändert, so lange nur keiner der Ströme des Feldes durchkreuzt wird.

Daraus folgt nach bekannten Sätzen der Theorie der Differentialausdrücke, die besonders in der Theorie complexer Funktionen Anwendung finden, dass $d\varphi$ in jedem Raume, der nicht von den elektrischen Strömen des Feldes durchsetzt wird, ein vollständiges Differentiale ist und φ selbst eindeutig bleibt, solange nicht durch den Integrationsweg Ströme des Feldes umfasst werden.

79. Ist das Solenoid ein ungeschlossenes, so werden also bloss Kräfte vorhanden sein, welche auf seinen Anfangspunkt und Endpunkt wirken; auf alle anderen Variabeln, welche bloss den Verlauf der Mittellinie zwischen diesen beiden Punkten bestimmen, werden keine Kräfte wirken. Bezeichnen wir den Werth von φ für den Punkt N mit keinem Index, den für den Punkt S aber mit einem Striche, so wird nach Gleichung 43 für ein homogenes Medium: *Kräfte auf offene Solenoide.*

$$J(S) = \nu\, d\varkappa(\varphi - \varphi').$$

Sind x, y, z die Coordinaten des Punktes N und X, Y, Z die Componenten der auf diesen Punkt im Felde wirkenden Kraft und setzt man das Produkt

46) $$\nu l'_S\, d\varkappa = m,$$

so findet man also:

47) $$X = -m\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad Y = -m\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad Z = -m\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

oder nach den Gleichungen 45:

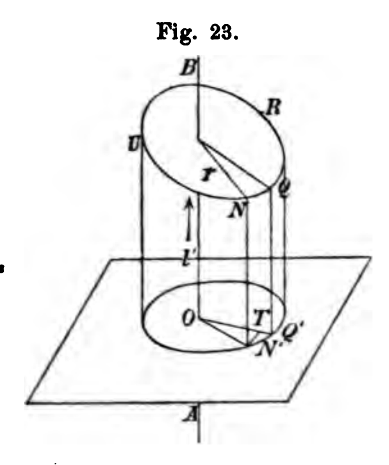
48) $$X = -ma, \; Y = -mb, \; Z = -mc.$$

Dieselben aber gerade entgegengesetzt bezeichneten Ausdrücke gelten für das andere Ende S des Solenoides.

Wir können jetzt N als den Nordpol des Solenoides und m als die Intensität dieses Nordpols bezeichnen. Es ist die Menge Nordmagnetismus, welche daselbst concentrirt gedacht werden müsste, um die Wirkung des Solenoids zu ersetzen. Eine gleiche Menge Südmagnetismus müsste natürlich in S concentrirt gedacht werden. Durch die Zahl m ist das Solenoid vollkommen charakterisirt. Alle Solenoide, für welche m und die Lage der beiden Enden dieselbe ist, verhalten sich in allen ihren Wirkungen vollkommen gleich.

80. Der Fall, wo die Mittellinie des Solenoids von elektrischen Strömen umschlossen wird, also φ mehrdeutig ist, bedarf einer näheren Erläuterung. Wir denken uns da zunächst einen unendlichen geradlinigen Strom (Fig. 23) AB von der Intensität l' und der Richtung von A gegen B und in der Entfernung r davon den Nordpol N eines Solenoides von der Intensität m, während sich der Südpol des Solenoides in so grosser Entfernung befindet, dass er keine bemerkbare Einwirkung erfährt.

Fig. 23.



8. Erfahrungssatz. [B]iot-Savart's [F]undamentalversuch.

Wir nehmen als durch die Erfahrung gegeben an, dass die Kraft P, welche ein solcher Strom auf den Solenoidpol ausübt, erstens der Intensität des Stromes l', zweitens der Intensität m des Solenoidpols proportional, drittens der Entfernung beider r verkehrt proportional ist und viertens auf der Ebene ABN senkrecht steht und ihrem Sinne nach durch die bekannte Ampère'sche Schwimmerregel definirt ist. Der Nordpol wird also weinwendig, d. h. wenn das Auge von B aus darauf blickt, dem Uhrzeiger entgegen um den Strom herumgedreht. Diese Gesetze wurden von Biot und Savart (freilich für einen Magnetpol) experimentell geprüft. Wir setzen daher, um mit Maxwell's Bezeichnung der Constante in Einklang zu bleiben:

$$P = 2\mu m l' : r.$$

Es ist nun die Arbeit zu berechnen, welche geleistet wird, wenn der Strom fix ist, aber der Solenoidpol eine beliebige geschlossene Curve $NQRU$ Fig. 23 beschreibt. Sei NQ ein Element dieser Curve, $N'Q'$ dessen Projection auf eine Ebene, welche durch einen beliebigen Punkt O des Stromes senkrecht zu diesem gezogen ist und $N'T \perp ON'$. Dann hat $N'T$ die Richtung der Kraft P und es ist die

Arbeit, welche vom Solenoidpole auf dem Wege NQ geleistet wird:

$$P \times N'T = 2\mu m l' \times \sphericalangle N'OT.$$

Beschreibt daher N eine geschlossene Curve, so ist die Arbeit gleich Null, wenn diese den Strom nicht umfasst, dagegen $4\pi\mu m l'$, wenn sie den Strom einmal weinwendig umschlingt. Es ist noch zu bemerken, dass dies die Arbeit ist, welche bei Bewegung des Pols in sichtbare lebendige Kraft oder in Arbeit gegen die die Bewegung verlangsamenden Aussenkräfte verwandelt, also der Energie des Mediums entzogen und durch die galvanische Batterie wieder nachgeliefert wird, die den Gegeninduktionsstrom in AB aufheben muss.

Neunte Vorlesung.

Elektrische Ströme in Körpern.

---

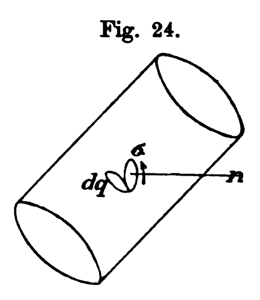
81. Wir gehen nun wieder zur Betrachtung eines völlig neuen Falles über. Wir setzten bisher immer nur lineare Stromfäden voraus. Wir wissen aber, dass auch räumliche dreidimensionale Körper von Elektricität durchströmt werden können; ja dass das letztere sogar der einzig praktisch realisirbare Fall ist, der sich dem eines linearen Stromfadens nur mehr oder minder nähern kann. *Strömung im Raum.*

In einem solchen räumlich ausgedehnten, von Elektricität durchströmten Körper hat aber die elektrische Strömung an jeder Stelle eine bestimmte Richtung, und weder diese noch die Intensität der Strömung ändert sich sprungweise (höchstens mit Ausnahme verschwindend weniger Stellen), so dass wir für alle unmittelbar benachbarten Punkte Stromrichtung und Intensität im Allgemeinen gleich voraussetzen können. Wir können uns die Sache dann immer so denken, als ob der Körper von unendlich vielen unendlich dicht aneinander liegenden Stromfäden durchzogen *9. Erfahrungssatz. Ströme in Körpern sind ebenfalls gerichtet.*

würde, deren jeder die früher einzelnen Stromfäden beilegten Eigenschaften besitzt.

Wir legen durch einen Punkt P des Körpers ein unendlich kleines Flächenelement dq Fig. 24 senkrecht zu den Stromfäden. Mdq sei die Zahl der Stromfäden, welche durch dq hindurchgehen, l' die Stromintensität in einem einzelnen derselben. Wir können also M als die Zahl der Stromfäden bezeichnen, die durch die Einheit des Querschnittes normal hindurchgehen, oder besser gesagt, hindurchgehen würden, wenn der Strömungszustand, der gerade im Punkte P herrscht, in einem endlichen Theile des Körpers gleichmässig herrschen würde. Das Produkt Ml' nennen wir die Stromdichtigkeit im Punkte P. Da wir uns den elektrischen Strom nicht nothwendig als Strom eines Fluidums denken, wollen wir es noch als eine besondere Hypothese auffassen, dass mehrere unendlich nahe parallele Ströme einem einzigen äquivalent sind, dessen Intensität gleich der Summe ihrer Intensitäten ist. Freilich wäre ohne diese Hypothese die Aufstellung von Formeln für räumliche Ströme kaum möglich. Theilt sich dann ein Büschel von Stromfäden, die anfangs unendlich nahe waren, in zwei getrennte Büschel, so haben wir den Vorgang der Stromverzweigung.

Fig. 24.



tromdichtigkeit.

Hypothese. uperpos. der Virkung unndlich naher Ströme.

82. Wir denken uns nun einen Solenoidpol an die betreffende Stelle gebracht und berechnen nach zwei Methoden die Arbeit A, welche derselbe leistet, wenn er eine beliebige unendlich kleine, in einer Ebene liegende, durch den Punkt P gehende geschlossene Curve σ in einer bestimmten Umkreisungsrichtung durchläuft. Durch Gleichsetzung beider Werthe von A gewinnen wir dann drei Gleichungen.

Die Arbeit, welche bei der Bewegung durch ein Längenelement $d\sigma$ der Curve geleistet wird, ist nach Formel 32 Art. 69:

49) $$A = -l'_S \, dJ(S),$$

wobei $dJ(S)$ die Veränderung ist, welche das Moment des

Feldes $J(S)$ auf das Solenoid erfährt, wenn der Pol die Strecke $d\sigma$ zurücklegt. Wir denken uns nun im Körper einen den Punkt P umschliessenden Cylinder Z construirt (Fig. 24), der zwar auch unendlich klein, aber unendlich gross gegenüber der Curve σ ist. Seine Axe soll die Länge ds haben und parallel den Stromfäden sein. ds soll sehr gross gegenüber den Querdimensionen des Cylinders und diese wieder sehr gross gegenüber der Curve σ sein.

Wir theilen A in zwei Summanden B und C; B soll diejenigen Glieder der Gleichung 49 enthalten, die von allen ausserhalb des Cylinders liegenden Stromtheilen herrühren, also die Arbeit darstellen, welche gegen die von ihnen ausgeübten Kräfte geleistet wird. C dagegen bezieht sich auf die innerhalb des Cylinders liegenden Stromtheile.

Wir können uns die Mittellinie des Solenoids dabei beliebig biegsam und ausserhalb des Cylinders Z bei der Arbeitsleistung A immer nur sich in sich selbst verschiebend denken. Dann wird also keiner der ausserhalb Z liegenden Stromtheile vom Pole umkreist; es ist keine Veranlassung zu einer Discontinuität oder Mehrdeutigkeit des Integrales 44 für diese Ströme vorhanden. Daher ist für sie Anfangs- und Endwerth von $J(S)$ gleich und der Ausdruck 49 (vgl. Gleichung 43) über die geschlossene Curve σ integrirt liefert für sie den Werth Null. Es ist also $B = o$.

Bei Berechnung von C aber kann man jeden innerhalb des Cylinders Z liegenden Stromfaden als Gerade und unendlich lang betrachten. Es ist also nach dem am Schlusse der vorigen Vorlesung Gefundenen die Arbeit ebenfalls gleich Null für alle Stromfäden, welche nicht durch die Curve σ hindurchgehen. Für alle Stromfäden zusammengenommen, welche hindurchgehen, ist die Arbeit

50) $$C = A = 4\pi\mu m M l' dq.$$

Man würde noch einfacher zum Ziele gelangen, wenn man sich bei Ableitung dieser Formel auf neuere Versuche von Joubin[1]) beriefe, welcher direct die Kräfte experimen-

[1]) Joubin, Compt. rend. der Par. Akad. Bd. 110 p. 231.

tell bestimmte, die auf einen in durchströmter Kupfersulfatlösung tauchenden Magnetpol wirken. Da aber diese Versuche weniger bekannt sind und ihr Resultat auch vielleicht weniger zweifellos feststeht, so zog ich es vor, von den Versuchen Biot's und Savart's auszugehen.

Componenten der Stromdichte.

82. Wir bezeichnen nun die drei Grössen:

51) $$u = Ml' \cos(l', x), \quad v = Ml' \cos(l', y), \quad w = Ml' \cos(l', z),$$

(wobei l' die Richtung der positiven Strömung ist, die mit der Cylinderaxe ds zusammenfällt), als die Componenten der Stromdichte im Punkte P, ferner den von der Curve σ umschlossenen Flächeninhalt mit $d\varkappa$, endlich die Normale zu dieser Curve mit n. Der Sinn dieser Normalen ist wieder so zu wählen, dass die angenommene Umkreisungsrichtung der Curve σ die weinwendige ist. Es ist dann:

$$dq = d\varkappa \cos(l', n) = d\varkappa\,[\cos(l', x)\cos(n, x) + \cos(l', y)\cos(n, y) + \cos(l', z)\cos(n, z)].$$

Daher liefert Formel 50:

52) $$A = 4\pi\mu m d\varkappa [u\cos(n, x) + v\cos(n, y) + w\cos(n, z)].$$

Nun wollen wir die Grösse A nach der zweiten Methode berechnen, indem wir die Kräfte X, Y, Z, welche auf den Solenoidpol wirken, den Gleichungen 48 entnehmen. Damals wurde (siehe Gleichung 46 und 47) gesetzt:

$$X = -l'_s \frac{\partial J(S)}{\partial x} = -l'_s l' \frac{\partial C}{dx}.$$

Die letzte Gleichung folgt aus dem am Schlusse des Art. 64 Gesagten. C ist die in der vierten und fünften Vorlesung so bezeichnete Grösse. Aus Gleichung 19 Art. 50 und dem unmittelbar nach ihrer Entwickelung Gesagten folgt, dass $-Xdx - Ydy - Zdz$ die der elektrokinetischen entnommene, in sichtbare verwandelte Energie ist. Substituiren wir in diesen Ausdruck die Werthe 48 und integriren wir über die Curve σ, so erhalten wir:

$$A = m\int(adx + bdy + cdz).$$

Da, wie wir bereits bemerkten, die Formel 42 Art. 76 immer gilt, wenn darin F, G, H beliebige Funktionen von

x, y, z sind, so können wir daselbst auch a, b, c für F, H, G substituiren, und erhalten:

$$A = m\,dx\left[\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{dx}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)\cos(n,z)\right].$$

Setzen wir dies dem Ausdrucke 52 gleich und bedenken, dass die Gleichheit für ganz beliebige Werthe der Cosinus gelten muss, so erhalten wir die drei Gleichungen: *Stokes' Stromgleichungen.*

53) $$\begin{cases} 4\pi\mu u = \dfrac{\partial c}{\partial y} - \dfrac{\partial b}{\partial z}, \quad 4\pi\mu v = \dfrac{\partial a}{\partial z} - \dfrac{\partial c}{\partial x}, \\ 4\pi\mu w = \dfrac{\partial b}{\partial x} - \dfrac{\partial a}{\partial y}.\text{[1]} \end{cases}$$

83. Es handelt sich noch darum, auch die Bedeutung der übrigen Grössen bei der Strömung in körperlichen Leitern zu fixiren. Wenn wir zunächst zur Gegenkraft der Bewegungshindernisse übergehen wollen, so haben wir strenge zwischen Leitern und Dielektricis zu unterscheiden. Da das Wort „Widerstand" leider zur Bezeichnung des mit ω bezeichneten galvanischen Leitungswiderstandes gebräuchlich ist, so müssen wir uns wohl hüten, statt „Gegenkraft der Bewegungshindernisse" ebenfalls das Wort „Widerstand"

[1]) Das bisher Gesagte gilt nur im homogenen isotropen Medium. Eine an verschiedenen Stellen verschieden concentrirte Eisenchloridlösung giebt ein Beispiel eines inhomogenen isotropen Mediums. Versuche in solchen Medien liegen noch gar nicht vor. Am ersten kann man noch aus den Grenzbedingungen, die für Trennungsflächen zweier verschiedener Körper gelten, also gewissermaassen durch Umkehrung der Methode, welche die Grenzschichten als dünne, aber continuirliche Uebergänge betrachtet, auf das Verhalten solcher Medien einen Schluss ziehen. So viel ist sicher, dass geschlossene Solenoide, welche auch im Innern von einem inhomogenen Medium erfüllt sind, Kräfte nach Aussen ausüben würden und dass daher die einfachste Verallgemeinerung unserer Gleichungen darin besteht, dass wir für solche Medien setzen:

54) $$\begin{cases} 4\pi u = \dfrac{\partial(c:\mu)}{y} - \dfrac{\partial(b:\mu)}{\partial z}, \quad 4\pi v = \dfrac{\partial(a:\mu)}{\partial z} - \dfrac{\partial(c:\mu)}{\partial x}, \\ 4\pi w = \dfrac{\partial(b:\mu)}{\partial x} - \dfrac{\partial(a:\mu)}{\partial y}. \end{cases}$$

zu gebrauchen, weil sonst Verwechslungen dieser, wie schon im Artikel 43 auseinandergesetzt wurde, total verschiedenen Grössen unvermeidlich wären.

5. Hypothese. Jedes Längenelement liefert zu ω einen unabhängigen Betrag.

Betrachten wir zunächst einen Leiter: daselbst ist die Gegenkraft der Bewegungshindernisse in einem einzelnen Stromfaden $W = \omega l'$. Wir setzen voraus, dass sich gerade so, wie es für die elektromotorischen Kräfte schon durch die dritte Hypothese Artikel 61 bedingt ist, auch diese Gegenkraft aus unendlich vielen Summanden zusammensetzt, von denen je einer $l' d\omega$ von je einem Elemente ds des Stromfadens herrührt, und dass dann die in der vierten und fünften Vorlesung entwickelten allgemeinen mechanischen Beziehungen nicht bloss für jeden Stromfaden als Ganzes, sondern auch für jedes Element ds desselben gelten. Dann ist also:

$$W = \int l' d\omega = \int \frac{d\omega}{M} Ml'.$$

Den Werth von Ml' erhält man, wenn man die Gleichungen 51 der Reihe nach mit $\cos(l', x)$, $\cos(l', y)$, $\cos(l', z)$ multiplicirt. Es folgt dann:

$$W = \int \frac{d\omega}{M} [u \cos(l', x) + v \cos(l', y) + w \cos(l', z)].$$

6. Hypothese. Die elektromotorische Kraft lässt sich in Componenten zerlegen.

Seien ferner ξ, η, ζ die Componenten der äusseren Kräfte, welche die Bewegung der Elektricität in dem Elemente ds unseres Stromfadens antreiben; dann ist die Kraft, welche in der Richtung von l' wirkt,

$$\xi \cos(l', x) + \eta \cos(l', y) + \zeta \cos(l', z),$$

daher die Gesammtkraft im Stromfaden:

$$\int [\xi \cos(l', x) + \eta \cos(l', y) + \zeta \cos(l', z)].$$

Endlich ist nach Formel 30 und 35 Art. 68 und 72:

$$J(s) = \int ds [F \cos(l', x) + G \cos(l', y) + H \cos(l', z)].$$

Wenn keine sichtbare Bewegung der ponderablen Körper eintritt, wird also:

$$\frac{dJ(s)}{dt} = \int ds \left[\frac{dF}{dt} \cos(l', x) + \frac{dG}{dt} \cos(l', y) + \frac{dH}{dt} \cos(l', z)\right].$$

Die Gleichung 28 Art. 67 liefert daher:

$$
55)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int[\xi \cos(l', x) + \eta \cos(l', y) + \zeta \cos(l', z)] \\
&= \int ds \left[\frac{dF}{dt}\cos(l', x) + \frac{dG}{dt}\cos(l', y) + \frac{dH}{dt}\cos(l', z)\right] \\
&\quad + \int \frac{d\omega}{M}[u \cos(l', x) + v \cos(l', y) + w \cos(l', z).
\end{aligned}
\right.
$$

Nach den gemachten Annahmen muss die obige Gleichung für alle Elemente ds einzeln erfüllt sein; es muss also zunächst sein:

$$\xi = X_1\, ds,\ \eta = Y_1\, ds,\ \zeta = Z_1\, ds,$$

wobei X_1, Y_1, Z_1 endliche Grössen sind und die Componenten der die galvanisch geleitete Strömung im betreffenden Punkte des Körpers antreibenden äusseren elektromotorischen Kraft (Chemismus, Thermoelektricität) darstellen. Ferner muss sein *Componenten der galvanischen Kraft.*

$$d\omega = \frac{M ds}{C},$$

wobei die endliche Grösse C die specifische Leitungsfähigkeit des Körpers im betreffenden Punkte heissen soll. Diese Formel zeigt zugleich, dass der galvanische Widerstand $d\omega$ des Elementes des Stromfadens der Länge ds desselben direct und dem Querschnitte verkehrt proportional ist, da ja M Stromfäden auf die Querschnittseinheit entfallen und folglich $1 : M$ als Querschnitt eines Fadens zu betrachten ist. *Specifische Leitungsfähigkeit.*

Die Anwendung der Gleichung 55 auf ein einzelnes Element liefert nach Substitution dieser Werthe:

$$56)\quad u = C\left(X_1 - \frac{dF}{dt}\right),\quad v = C\left(Y_1 - \frac{dG}{dt}\right),\quad w = C\left(Z_1 = \frac{dH}{dt}\right).$$

84. Für die in der Zeit δt in einem Stromfaden von der Länge ds entwickelte Joule'sche Wärme liefert die Gleichung 17 (Art. 50): *Joule's Wärme im Volumelemente.*

$$d\omega l'^2 \delta t = \frac{M ds}{C} l'^2 \delta t.$$

Das Volumelement von der Länge ds und dem Querschnitte dq, also dem Volumen $dq\, ds = d\tau$ enthält Mdq solcher

Fäden, daher ist die darin während der Zeit δt entwickelte Joule'sche Wärme Mdq mal so gross, also gleich:

$$57)\qquad dI = \frac{M^2 d\tau}{C} l'^2 \delta t = \frac{d\tau \delta t}{C}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Elektrokinetische Energie eines Volumelementes.

Die elektrokinetische Energie in einem Elemente ds eines Stromfadens ist nach Gleichung 33 (Art. 70):

$$\frac{l'}{2} J(s) = \frac{l'}{2} ds[F\cos(l', x) + G\cos(l', y) + H\cos(l', z)],$$

die im Volumelemente $d\tau$ von der Länge ds und der Querschnitte dq also:

$$58)\qquad \begin{cases} dE = \dfrac{Ml'}{2} d\tau [F\cos(l', x) + G\cos(l', y) + \cos(l', z)] \\ \qquad = \dfrac{d\tau}{2}(uF + vG + wH). \end{cases}$$

Componenten der dielektrischen Polarisation.

85. Genau so nehmen wir in einem Volumelemente $d\tau$ von der Länge ds und dem Querschnitte dq eines Dielektricums Mdq parallele, durch Aenderung einer dielektrischen Verschiebung l entstehende Ströme an. Nur ist jetzt die Gegenkraft der Bewegungshindernisse W dem undifferentiirten l proportional. Wir müssen daher setzen:

$$59)\qquad Ml\cos(l, x) = f, \quad Ml\cos(l, y) = g, \quad Ml\cos(l, z) = h;$$

Reibungselektromotorische Kraft.

f, g, h sollen die Componenten der dielektrischen Polarisation der Volumeneinheit heissen. Wir wollen ferner die Componenten der im Dielektricum wirkenden äusseren elektromotorischen Kräfte mit X_2, Y_2, Z_2 bezeichnen und sie die Componenten der reibungselektromotorischen Kräfte nennen, womit wir nicht etwa behaupten wollen, dass im Dielektricum nur durch Reibung Elektricität erregt werden könnte, ja nicht einmal, dass überhaupt die mechanische Reibung die eigentliche Ursache der Elektricitätserregung daselbst sei.[1]) Diese drei Grössen treten in der Gleichung 55 an die Stelle von X_1, Y_1, Z_1; an Stelle von u, v, w tritt

$$\frac{df}{dt}, \quad \frac{dg}{dt}, \quad \frac{dh}{dt};$$

---

[1]) Um dies sowie schwerfällige Wortzusammensetzungen zu vermeiden und gleichzeitig einen sicher Würdigen nach beliebten Mustern zu feiern, könnte man dem Galvanismus den Guerikismus gegenüberstellen und X_2, Y_2, Z_2 die guerikischen Kräfte nennen.

endlich an Stelle von C eine andere Constante $k : 4\pi$, welche wir die Dielektrisirungszahl oder Dielektricitätsconstante nennen wollen. Gerade so, wie wir aus der Gleichung 55 die Gleichungen 56 gewonnen haben, so ergeben sich jetzt die folgenden Gleichungen: *Dielektrisirungszahl.*

Dielektrisirungsgleichungen.

60)
$$\begin{cases} 4\pi f = k\left(X_2 - \frac{dF}{dt}\right), \quad 4\pi g = k\left(Y_2 - \frac{dG}{dt}\right), \\ 4\pi h = k\left(Z_2 - \frac{dH}{dt}\right). \end{cases}$$

Für die Energie der dielektrischen Polarisation im Volumelemente $d\tau$ aber ergiebt sich aus der Gleichung 18 (Art. 50): *Energie der dielektrischen Polarisation in einem Volumelemente.*

61)
$$d\Pi = \frac{2\pi d\tau}{k}(f^2 + g^2 + h^2).$$

Es ist hierbei noch wohl zu bemerken, dass im Dielektricum die Stromcomponenten u, v, w immer die Werthe

62)
$$\frac{df}{dt}, \quad \frac{dg}{dt}, \quad \frac{dh}{dt}$$

haben, welche Werthe namentlich auch, sobald es sich um ein Dielektricum handelt, in den Stokes'schen Stromgleichungen 53 und 54 Art. 82 substituirt gedacht werden müssen.

86. Selbstverständlich giebt es zwischen reinen Leitern und reinen Isolatoren Zwischenstufen, sogenannte Halbleiter oder besser gesagt, leitende Dielektrica; denn die wesentlichste Eigenschaft derselben besteht weniger in ihrem zumeist sehr grossen Leitungswiderstand, sondern vielmehr darin, dass neben der elektrischen Leitung sich darin auch dielektrische Polarisation bemerkbar macht. *7. Hypothese. Superpositionsprincip im leitenden Dielektricum.*

Die experimentelle Untersuchung dieser Zwischenstufen bietet gerade die grössten Schwierigkeiten, da die Oberflächenleitung und ausserdem bei festen Körpern die Inhomogenität, bei Flüssigkeiten der Feuchtigkeitsgehalt und anderes sehr stören; daher ist es erklärlich, dass ausser einigen bestätigenden Versuchen von Cohn und Arons[1]) die Maxwell'sche Annahme über das Verhalten dieser Halbleiter noch keine experimentelle Prüfung gefunden hat und

[1]) Wied. Annalen Bd. 28, S. 454, 1886; Bd. 33, S. 13, 1888.

daher heutzutage wohl noch als Hypothese bezeichnet werden muss. Dieselbe besteht darin, dass in Halbleitern dielektrische Polarisation und galvanische Leitung sich unbehindert superponiren, die eine durch die Dielektrisirungsgleichungen 60, die andere durch die Widerstandsgleichungen 56 bestimmt. Die äusseren elektromotorischen Kräfte, welche auf die dielektrische Polarisation wirken, können dabei möglicherweise andere sein und daher andere Werthe haben, wie diejenigen, welche auf die galvanische Leitung wirken; daher wurde zwischen X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 unterschieden. Als elektromotorische Kräfte der Induction aber:

$$dF:dt,\ dG:dt,\ dH:dt$$

sind in beiden Fällen dieselben Werthe einzuführen, und zwar ist bei ihrer Berechnung die gesammte elektrische Stromstärke, sowohl die galvanische als auch die durch Aenderung der dielektrischen Polarisation bedingte, welche letztere durch die Ausdrücke 62 gegeben ist, einzuführen.

Componenten des totalen und des galv. geleiteten Stromes.

Um Irrungen vorzubeugen, wollen wir daher jetzt die Componenten der gesammten elektrischen Strömung mit u, v, w, die der galvanisch geleiteten Strömung allein aber mit p, q, r bezeichnen, so dass wir haben:

Superpositionsgleichungen.

$$63)\qquad u = p + \frac{df}{dt}, \qquad v = q + \frac{dg}{dt}, \qquad w = r + \frac{dh}{dt}.$$

Widerstandsgleichungen.

Wir erhalten dann statt der Gleichungen 56 die folgenden:

$$64)\qquad \begin{cases} p = C\left(X_1 - \frac{dF}{dt}\right), \qquad q = C\left(Y_1 - \frac{dG}{dt}\right), \\ \qquad r = C\left(Z_1 - \frac{dH}{dt}\right). \end{cases}$$

In den Gleichungen 53 und 54 dagegen ist nicht p, q, r für u, v, w zu substituiren, sondern diese Gleichungen gelten ungeändert für das leitende Dielektricum und u, v, w haben in denselben die durch die Gleichungen 63 definirte Bedeutung.

Ist die Hypothese, welche diesen Gleichungen zu Grunde liegt und von uns als die 7. bezeichnet wurde, auch heute noch nicht ganz feststehend, so fassen unsere Gleichungen doch jedenfalls in der einfachsten Weise die für Leiter

und Nichtleiter geltenden Relationen einheitlich zusammen, indem sie in die für Leiter geltenden übergehen, wenn wir die Dielektrisirungszahl $k = o$ setzen, dagegen in die für Dielektrica geltenden, wenn die Leitungsfähigkeit $C = o$ ist.

Man sieht leicht, dass diese für leitende Dielektrica aufgestellten Gleichungen ganz denjenigen entsprechen, welche wir für das durch Fig. 9 dargestellte Schema fanden und in Artikel 53 als die Gleichungen 23 bezeichneten. Den dort mit M_1 oder M_2 bezeichneten Kräften entsprechen jetzt X_1, Y_1, Z_1, den mit N_1, N_2 bezeichneten X_2, Y_2, Z_2; den Grössen n (n_1 oder n_2) und m' entsprechen f, g, h und p, q, r, den l' aber u, v, w; endlich den Constanten ω und ϑ die jetzt gebrauchten Constanten $1 : C$ und $4\pi : k$.

Zehnte Vorlesung.

Gesetze der stationären und angenähert stationären Strömung.

---

87. Wir haben nun die Aufgabe der Ableitung der Grundgleichungen im Wesentlichen gelöst und es ist hier nicht meine Absicht, mich in eine weitläufige Anwendung derselben auf specielle Fälle einzulassen. Nur die Herleitung der einfachsten Grundgleichungen der alten Elektricitätstheorie und Optik soll noch angeschlossen werden, damit der Sinn der gefundenen Gleichungen nach keiner Richtung dunkel bleibe. Wir wollen zunächst einige Gleichungen ableiten, welche nur Consequenzen der vorhergehenden Formeln darstellen, aber deren Kenntniss für die weiteren Entwickelungen unerlässlich ist.

Aus den drei Gleichungen 40 (s. A der Zusammenstellung in Art. 88) folgt sofort:

65) $$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = o.$$ *Continuitätsgleichung der Induktion.*

Ebenso folgt aus den Gleichungen 53 und 54:

Continuitätsgleichung der Strömung. 66) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = o.$$

Die Grössen X_1, Y_1, Z_1 haben nur an Stellen, wo galvanische Elemente thätig sind oder durch Temperaturdifferenzen thermoelektromotorische Kräfte erzeugt werden, die Grössen X_2, Y_2, Z_2, nur dort, wo gerade Reibungselektricität entwickelt wird, von Null verschiedene Werthe. Schliessen wir zunächst solche singuläre Stellen von der Betrachtung ganz aus, so vereinfachen sich die Gleichungen 60 und 64 und gehen über in:

67) $$p = -C\frac{dF}{dt}, \quad q = -C\frac{dG}{dt}, \quad r = -C\frac{dH}{dt},$$

68) $$4\pi f = -k\frac{dF}{dt}, \quad 4\pi g = -k\frac{dG}{dt}, \quad 4\pi h = -k\frac{dH}{dt}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$u = p + \frac{df}{dt} = -C\frac{dF}{dt} - \frac{k}{4\pi}\frac{d^2F}{dt^2}.$$

Bilden wir die entsprechenden Gleichungen für v und w und addiren alle drei, nachdem wir die erste nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differenzirt haben, so finden wir unter Berücksichtigung der Gleichungen 66 im homogenen Medium:

$$k\frac{d^2\Theta}{dt^2} + 4\pi C\frac{d\Theta}{dt} = o,$$

wobei

69) $$\Theta = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \text{ ist.}$$

Hieraus folgt:

70) $$\Theta = C_1 e^{-\frac{4\pi C}{k}t} + C_2.$$

Diese Gleichung hängt auf's Innigste zusammen mit den Gleichungen 89—93, welche wir später in Art. 97 und 98 erhalten werden. Vorläufig wollen wir uns mit den folgenden, schon jetzt erforderlichen Bemerkungen begnügen.

Sei in dem betreffenden Raume irgend ein Mal weder ein Magnet, noch ein elektrischer Strom, noch sonst eine

elektrische Wirkung vorhanden gewesen, so dass zu dieser Zeit überall die magnetischen und elektrischen Kräfte $= o$ waren, was wir den neutralen Zustand des Feldes und der darin befindlichen Körper nennen wollen. Dann muss das Feld damals auf ein etwa hineingebrachtes Solenoid oder Stromelement gar keine Kraft ausgeübt haben; es müssen also die Differentialquotienten von F, G, H nach allen Coordinaten gleich 0 gewesen sein, denn diese Differentialquotienten multiplicirt mit der Stromintensität und Projection des Stromelementes liefern die Kräfte, welche das Feld auf das Stromelement ausübt, mit Ausschluss der Wirkung des hineingebrachten Stromes auf sich selbst; daher muss zur in Rede stehenden Zeit $\Theta = d\Theta : dt = o$ gewesen sein. Haben seit dieser Zeit an einem Punkte des Feldes niemals elektromotorische Kräfte gewirkt, so haben seit dem die Gleichungen 67, 68 bis 70 gegolten. Daher müssen in der letzten dieser Gleichungen die Constanten C_1 und C_2 und daher auch

71) $$\Theta = o$$

sein. Diese Gleichung hört jedoch in dem Momente, wo im betrachteten Punkte selbst galvanische Elemente, thermoelektromotorische oder reibungselektromotorische Kräfte thätig sind, zu gelten auf.

88. Behufs leichterer Uebersicht, sowohl für das folgende als auch für die Lectüre der Originalabhandlungen will ich hier die Vektoren und Componenten der verschiedenen Grössen, die Constanten sowie die wichtigsten Gleichungen zusammenstellen: *Zusammenstellung der Vektoren.*

	Vekt.	Comp.
Elektromagn. Moment	$\mathfrak{A}$	F, G, H
Magnetische Induktion	$\mathfrak{B}$	a, b, c
Totaler elektr. Strom	$\mathfrak{C}$	u, v, w
Dielektr. Polarisation	$\mathfrak{D}$	f, g, h
Elektromotor. Kraft	$\mathfrak{E}$	P, Q, R
Magnetische Kraft	$\mathfrak{H}$	α, β, γ
Galv. geleitet. Strom	$\mathfrak{K}$	p, q, r

Dielektrisirungszahl (Dielektricitätsconstante) k.
Magnetisirungszahl μ.
Specifisches Leitungsvermögen C.
Elektrost. Potentialfunktion ψ.
Magnet. Potentialfunktion φ.
Magnetismusmenge m.
Elektrische Volumdichte ε.
Elektrische Flächendichte η.

Folgendes sind ferner die wichtigsten Gleichungen:

1. Fundamentalgleichungen zwischen den Grössen, welche die Beschaffenheit des Feldes definiren:

A. 40)
$$\begin{cases} a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\ b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{cases}.$$

B. 53)
$$\begin{cases} 4\pi\mu u = \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \\ 4\pi\mu v = \frac{\partial a}{d z} - \frac{\partial c}{\partial x} \\ 4\pi\mu w = \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \end{cases}$$

B'. 54)
$$\begin{cases} 4\pi u = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b}{\mu}\right) \\ 4\pi v = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{\mu}\right) \\ 4\pi w = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{\mu}\right) \end{cases}.$$

C. 60)
$$\begin{cases} 4\pi f = k\left(X_2 - \frac{dF}{dt}\right) \\ 4\pi g = k\left(Y_2 - \frac{dG}{dt}\right) \\ 4\pi h = k\left(Z_2 - \frac{dH}{dt}\right) \end{cases}.$$

C'. 68)
$$\begin{cases} 4\pi f = -k\frac{dF}{dt} \\ 4\pi g = -k\frac{dG}{dt} \\ 4\pi h = -k\frac{dH}{dt} \end{cases}.$$

D. 64)
$$\begin{cases} p = C\left(X_1 - \frac{dF}{dt}\right) \\ q = C\left(Y_1 - \frac{dG}{dt}\right) \\ r = C\left(Z_1 - \frac{dH}{dt}\right) \end{cases}.$$

D'. 67)
$$\begin{cases} p = -C\frac{dF}{dt} \\ q = -C\frac{dG}{dt} \\ r = -C\frac{dH}{dt} \end{cases}.$$

E. 63. $u = p + \frac{df}{dt}, \quad v = p + \frac{dg}{dt}, \quad w = r + \frac{dh}{dt}.$

2. Folgegleichungen derselben:

65) a. $$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = o,$$

66) b. $$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = o,$$

69) c. $\Theta = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz},$ | 71) c'. $\Theta = o.$

3. Gleichungen zur Bestimmung von Hilfsbegriffen:

61) α. $$d\Pi = 2\pi d\tau(f^2 + g^2 + h^2) : k,$$

31) β. $$K(s) = -l' \frac{\partial J(ds)}{\partial k},$$

28) γ. $$L(s) = \frac{dJ(s)}{dt} + W,$$

41) δ. $$\begin{cases} J(s) = \int J(ds) = \int(Fdx + Gdy + Hdz) = \\ = \int J(d\varkappa) = \int(d\lambda + bd\mu + cd\nu), \end{cases}$$

51) ε. $$\begin{cases} u = Ml' \cos(l', x) \\ v = Ml' \cos(l', y) \, . \\ w = Ml' \cos(l', z) \end{cases}$$

47) 48) ζ. $$\begin{cases} X = -ma = -m\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ Y = -mb = -m\frac{\partial \varphi}{\partial y} \, . \\ Z = -mc = -m\frac{d\varphi}{\partial z} \end{cases}$$

89. Es soll nun das Feld durch einen einzigen Solenoidpol N' von der Intensität m' erzeugt sein, welcher sich in einem homogenen Medium befindet, während der andere Pol des Solenoids unendlich entfernt ist. Dann ist überall im Felde $u = v = w = o$. Es folgt also aus den Gleichungen 53 (B), dass a, b, c die partiellen Differentialquotienten einer Funktion φ sind. Dieselbe hängt, da Wirkung gleich Gegenwirkung ist und wir daher alles in Art. 79 Gesagte auch hier anwenden dürfen, nur von dem Punkte des Raumes ab, wo sich der Solenoidpol befindet, nicht aber von der Richtung und Lage der Mittellinie des Solenoids. Denn wenn wir an den Pol N' den Südpol eines zweiten Solenoides von gleicher Intensität anlegen, so ist die Summe der φ für beide Solenoide zusammen stets gleich Null, wie immer bei unveränderter Lage des zweiten Solenoides die Richtung und Gestalt des ersten sich ändern mag Der Werth des φ, der von dem ersten Solenoid allein herrührt, in einem Aufpunkte P ist daher für jede Gestalt und Lage desselben gleich dem ganz davon unabhängigen negativen Werthe des φ für das zweite Solenoid, woraus folgt, dass er nur Funktion der Entfernung $PN = r$ des Aufpunktes vom Solenoidpol sein kann. Denn wäre er irgendwie von der Richtung dieser Geraden abhängig, so müsste er sich ändern, wenn r

Coulomb's Gesetz für Magnetpole.

seine Lage gegen das (erste) Solenoid änderte und müsste sich daher auch umgekehrt in derselben Weise ändern, wenn die gleiche relative Lageänderung bei unveränderter Lage von r durch Aenderung der Lage des Solenoides eintreten würde. Letzteres widerspricht aber dem vorher Bewiesenen. Da m' der Stromintensität im Solenoide proportional ist, φ aber seiner Definition gemäss nur Glieder enthält, welche ebenfalls dieser Stromintensität proportional sind, so können wir also setzen:

$$\varphi = m' f(r).$$

Die Gleichung 65 (a des Art. 88) liefert aber sofort:

$$\frac{\partial^2 f(r)}{dx^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2} = o,$$

woraus bekanntlich folgt:

$$f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Dadurch ist das Feld vollständig definirt. Es werde nun die Wirkung des Feldes auf einen Nordpol N eines zweiten Solenoides berechnet, der nach dem Punkte P gebracht wird. Dem Sinne unserer Formeln gemäss, die immer die Wirkung eines bestimmten Feldes auf einen bestimmten Aufstrom mit Ausschluss der Wirkung des letzteren auf sich selbst geben, ist dabei der zweite Nordpol nicht mit zum Felde zu rechnen. Nach den Formeln 47 (ζ des Art. 88) wirkt dann auf den zweiten Nordpol eine Kraft von der Intensität $m m' C_1 : r^2$ in der Richtung der Verbindungslinien beider Pole.

Parallel entgegengesetzte Ströme in der Entfernung Null heben einander auf. Da muss also das C enthaltende Glied der Gleichung 11, Art. 37, negativ sein, um die übrigen wesentlich positiven aufheben zu können; daher muss auch das Moment des einen Stromes auf den anderen negativ sein, wenn für den letzteren die Richtung, in der er wirklich durchströmt wird, zu Grunde gelegt wird. Da dieses Moment bei grosser Entfernung der beiden Ströme Null ist, muss dessen Differentialquotient nach der Entfernung (letztere wachsend gedacht) positiv sein. Daher ist die Kraft, welche von aussen wirken muss, um die Entfernung ent-

gegengesetzter paralleler Ströme constant zu erhalten, negativ, d. h. sie wirkt dem Wachsthume der Entfernung entgegen oder die Ströme stossen sich ab. Da zwei unmittelbar aneinanderstossende gleichnamige Solenoidpole ebenfalls entgegengesetzte Ströme enthalten, was man am besten sieht, wenn die Mittellinien sich continuirlich fortsetzen, so müssen auch diese sich abstossen. Dass obiger Ausdruck für die Wechselwirkung zweier Solenoidpole sein Zeichen wechselt, wenn einer der Pole ein entgegengesetzter ist, sieht man sofort.

Fassen wir Stahlmagnete als Körper auf, in denen um jedes Molekül ein Elementarstrom fliesst, so ist der Beweis auch für Magnetpole geliefert. Nur der Einfluss etwaiger Veränderlichkeit der Constante μ, von welcher die magnetische Induktionswirkung abhängt, kann erst studirt werden, wenn man die Grenzbedingungen für Flächen kennt, wo zwei verschiedene Körper aneinanderstossen.

Moment eines linearen Stromes auf einen Punkt.

90. Es sei nun das Feld durch einen nahezu linearen Strom von der Gesammtintensität i und beliebiger geschlossener Mittellinie erzeugt. Dann sind bloss im Innern des stromführenden Drahtes u, v, w von Null verschieden. Im gesammten übrigen Raume sind diese Grössen gleich Null.

Um die Aufstellung besonderer Gleichungen für die Oberfläche des Leiters unnöthig zu machen, setzen wir μ innerhalb und ausserhalb desselben gleich voraus. Substituiren wir in die erste der Gleichungen 53 (B) für b und c ihre Werthe aus den Gleichungen 40 (A), so erhalten wir:

$$-4\pi\mu u = \Delta F - \frac{d\Theta}{dx},$$

wobei Δ das Symbol für

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ist. Vermöge der Gleichung 71 (c') folgt also:

72) $$-4\pi\mu u = \Delta F.$$

Um die Gleichung 71 unbedenklich anwenden zu können müssen wir annehmen, dass die Stelle, wo sich die stromerzeugende galvanische Batterie befindet, etwas weiter entfernt ist, so dass nicht diese selbst, sondern bloss die in

der Drahtleitung circulirenden elektrischen Ströme das Feld bestimmen, oder wir müssen annehmen, dass auch die Batterie selbst den Zustand des Feldes nicht weiter modificirt, als dies durch die darin enthaltenen elektrischen Ströme bedingt ist, was keine Consequenz unserer Gleichungen ist. Ferner sei noch folgende Bemerkung beigefügt: Die Annahme, dass in der den Leiter umgebenden Luft $u = v = w = o$ ist, wird bloss erfüllt sein, wenn die Strömung im Leiter stationär ist oder sich doch nur sehr langsam mit der Zeit ändert, so dass sie während jedes Zeitmomentes als stationär betrachtet werden darf. Sonst entstehen in der umgebenden Luft dielektrische Polarisationen, deren beständige Veränderung bewirkt, dass auch in der Luft u, v, w von Null verschieden sind. Da sich aber diese dielektrischen Polarisationen wellenförmig mit der Geschwindigkeit des Lichtes ausbreiten, so kommen sie in allen Experimenten über Elektrodynamik und Induction nicht in Betracht mit Ausnahme der in der neuesten Zeit nach der Methode von Hertz angestellten.

Unter allen diesen Annahmen ist also F eine Funktion, welche im Innern des Leitungsdrahtes der Gleichung genügt:

72) $$\Delta F = -4\pi\mu u,$$

in der umgebenden Luft überall die Gleichung $\Delta F = o$ erfüllt und im Unendlichen jedenfalls verschwindet, da ja dort das Feld neutral sein muss. (Eine zu F hinzutretende reine, d. h. von x, y, z, t unabhängige Constante würde übrigens nirgends in unsere Gleichungen eingehen.)

Gleichungen Kirchhoff's für Strömung im Raum.

Wir wissen, dass, wenn $d\tau$ ein Volumelement im Innern des Leitungsdrahtes ist und die Integration über dessen ganzes Innere erstreckt wird, diese Gleichungen nicht anders erfüllt werden können, als wenn der Werth von F in irgend einem Aufpunkte P durch die Gleichung gegeben ist:

$$F = \mu \int \frac{u\,d\tau}{r},$$

wobei r die Entfernung des Aufpunktes P vom betreffenden Volumelemente $d\tau$ ist. Integriren wir dieselben Gleichungen $\Delta F = o$ und 72 nach derselben Methode für den Fall,

dass ausgedehnte Körper in beliebiger Weise räumlich von Elektricität durchströmt werden, so erhalten wir, wie man leicht sieht, die Gleichungen, welche Kirchhoff, Helmholtz etc.[1]) für die Gesetze der Induction in räumlich ausgedehnten Körpern fanden, natürlich mit den speciellen der Maxwell'schen Theorie eigenen Werthen der Constanten, welche Longitudinalschwingungen ausschliessen.

Wir wählen als Volumelement $d\tau$ wiederum einen Cylinder, dessen Axe ds parallel der Stromrichtung ist und dessen Querschnitt den Flächeninhalt dq hat. Es ist dann nach den Gleichungen 51 (ε):

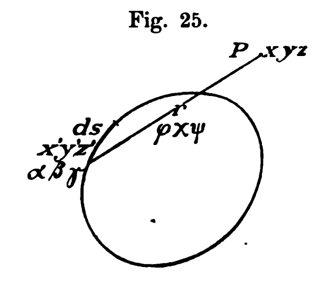
$$u = Ml' \cos(l', x),$$

daher:

$$F = \mu \int \frac{ds\, dq}{r} M l' \cos(l', x).$$

$Ml'dq$, über den ganzen Querschnitt des Leitungsdrahtes integrirt, liefert die gesammte Stromintensität i. Zählen wir ausserdem noch die positive Richtung des Elementes ds in dem Sinne, in welchem der Strom fliesst, und bezeichnen die Cosinus der Winkel, welche ds, daher auch l', mit den Coordinatenaxen bildet, mit α, β, γ, Fig. 25, so ist:

Fig. 25.



$$F = \mu i \int \frac{\alpha\, ds}{r}.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$G = \mu i \int \frac{\beta\, ds}{r}, \qquad H = \mu i \int \frac{\gamma\, ds}{r}.$$

Hierdurch ist das Feld vollständig bestimmt und wir denken uns zunächst in den Aufpunkt P mit den Coordinaten x, y, z einen Solenoidpol von der Intensität m gebracht (Fig. 25). Dann sind die Componenten der Kraft, welche im Felde auf diesen Solenoidpol wirken, nach den Gleichungen 48 (ζ des Art. 88): *Biot-Savart's Gesetz.*

[1]) Kirchhoff, Wied. Ann. Bd. 100, S. 193 und 351, Bd. 102, S. 529, 1857; Helmholtz, Borchardt's Journal Bd. 72, S. 57, 1870.

$$X = -ma, \quad Y = -mb, \quad Z = -mc.$$

Nach den Gleichungen 40 (A) ist:

$$\begin{cases} a = \frac{\partial H}{dy} - \frac{\partial G}{\partial z} = \mu i \int \frac{ds}{r^3} [\beta(z-z') - \gamma(y-y')] \\ \qquad = \mu i \int \frac{ds}{r^2} (\beta\psi - \gamma\chi), \end{cases}$$

wobei x', y', z' die Coordinaten des Elementes ds' und φ, χ, ψ die Cosinus der Winkel sind, welche die positive (von ds gegen P gezogene) Richtung von r mit den positiven Coordinatenaxen bildet.

Nun ist nach bekannten Regeln der analytischen Geometrie:

$$\Omega = \sqrt{(\gamma\chi - \beta\psi)^2 + (\alpha\psi - \gamma\varphi)^2 + (\beta\varphi - \alpha\chi)^2} = \sin(ds, r)$$
$$\beta\psi - \gamma\chi = \Omega \cos(n, x).$$

Hier bedeutet n die Richtung, welche auf ds und r senkrecht steht und deren Sinn, da Ω also auch $\sin(ds, r)$ immer positiv betrachtet wird, so zu nehmen ist, dass die Drehung der positiven ds-Richtung in die positive r-Richtung auf kürzestem Wege weinwendig gegen die positive n-Richtung geschieht. Man überzeugt sich hiervon, wenn man ds mit der x-Axe, r mit der y-Axe und n mit der z-Axe zusammenfallen lässt. Mit Hilfe der zuletzt entwickelten Gleichungen ergiebt sich:

$$X = -ma = -m\mu i \int \frac{ds}{r^2} \sin(ds, r) \cos(n, x)$$

Analoge Formeln gelten für Y und Z. Da dies die Kräfte sind, welche von aussen wirken müssen, um den Solenoidpol in Ruhe zu erhalten, so ist die Kraft, welche der Strom auf den Solenoidpol auszuüben scheint, gerade so gross, als ob jedes Element des Stromes auf denselben die Kraft

$$\frac{\mu m i \, ds \sin(ds, r)}{r^2}$$

in der Richtung n ausüben würde. Bezüglich der Uebertragung auf Magnetpole gilt wieder das am Ende des vorigen Abschnittes über das Coulomb'sche Gesetz Gesagte.

Neumann's Gesetz für die Induktion.

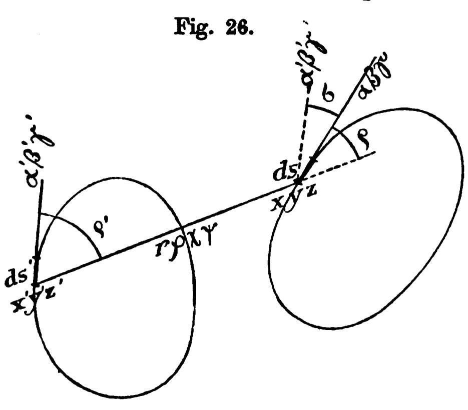
91. Wir betrachten genau dasselbe Feld, wie im vorigen Abschnitte. Der Aufstrom soll aber jetzt ein zweiter,

nahezu linearer Stromkreis von beliebiger geschlossener Mittellinie sein. Es empfiehlt sich jetzt, die Intensität in dem ersten Strome, welcher das Feld erzeugt, mit i', ein Element desselben mit ds' und dessen Richtungscosinus mit α', β', γ' zu bezeichnen, so dass in einem Aufpunkte P mit den Coordinaten x, y, z die Componenten des Momentenvektors die Werthe haben:

$$F = \mu i' \int \frac{\alpha' ds'}{r}, \qquad G = \mu i' \int \frac{\beta' ds'}{r}, \qquad H = \mu i' \int \frac{\gamma' ds'}{r},$$

wobei natürlich r wieder die Entfernung des Elementes ds' vom Aufpunkte P bezeichnet. Der Sinn aller Grössen ist der früher definirte; x', y', z' sollen die Coordinaten des Elementes ds' sein.

Dagegen soll i die Intensität im Aufstrome und ds soll das Element desselben sein, das sich im Aufpunkte P befindet. Die Coordinaten dieses Elementes sollen mit x, y, z, seine Richtungscosinus mit α, β, γ, seine Projectionen auf die drei Coordinatenaxen mit dx, dy, dz bezeichnet werden (Fig. 26). Das Moment des Elementes ds setzt sich nach Formel 41 (δ Art. 88) aus den Momenten der Projectionen zusammen und ist daher:


Fig. 26.

$$J(ds) = Fdx + Gdy + Hdz = ds(F\alpha + G\beta + C\gamma),$$

das Moment des ganzen Aufstromes aber ist:

$$J(s) = \int ds(F\alpha + G\beta + H\gamma).$$

Substituirt man für F, G, H die obigen Werthe und bezeichnet den Cosinus des Winkels der beiden Stromelemente ds und ds' mit

$$\sigma = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma',$$

so wird also:

73) $$J(s) = \mu i' \int\int \frac{\sigma ds ds'}{r} .$$

Nach Gleichung 28 (γ Art. 88) ist somit die im Aufstrome inducirte elektromotorische Kraft gleich

74) $$\mu \frac{d}{dt} i' \int\int \frac{\sigma ds ds'}{r} ,$$

was mit den bekannten Gesetzen der Induktion übereinstimmt. Wir haben also die Abhängigkeit des wechselseitigen Induktionscoëfficienten von den Dimensionen der beiden Stromleiter gefunden, denn wir sind jetzt wieder zu dem in der vierten und fünften Vorlesung behandelten Falle der Wechselwirkung zweier geschlossener Ströme zurückgekehrt und sahen schon in der siebenten Vorlesung (Schluss des Art. 64), dass unsere jetzigen Grössen $J(s)$, i, i' genau dasselbe sind, was dort mit Cl'_2, l'_1, l'_2 bezeichnet wurde. Da ferner die beiden Selbstinduktionscoëfficienten A und B nach der bekannten Methode gefunden werden können, dass man unter ds und ds' zwei Elemente eines und desselben Stromleiters versteht und dann noch durch zwei dividirt, so ist hierdurch die nothwendige Ergänzung der Gleichungen 16, Art. 48, geliefert.

Elfte Vorlesung.

Ampère's Gesetz. Elektrische Schwingungen.

Arbeit bei Deformation eines linearen Stroms.

92. Die Gleichung 73 liefert auch die ponderomotorischen Kräfte, welche der das Feld bestimmende Strom auf den Aufstrom ausübt. Wir haben nämlich nach der Gleichung 31 (β in Art. 88) für die ponderomotorische Kraft, welche auf irgend einen Parameter k durch das Feld (nicht die Wirkung des Aufstroms auf sich selbst) ausgeübt wird:

$$K(s) = - i' \frac{\partial J(s)}{\partial k} .$$

Die gesammte Arbeit aber, welche geleistet wird, wenn jeder Parameter eine Variation δk erfährt, ist nach Gleichung 32 Art. 69:

$$\sum K(s)\delta k = -l'\sum \frac{\partial J(s)}{\partial k}\delta k = -l'\delta J(s).$$

Es ist nicht nothwendig, den Querschnitt des Aufstroms nochmals in einzelne Querschnittselemente zu zerlegen; wir betrachten daher den Querschnitt als Ganzes und l' ist die gesammte Stromintensität i. Wir könnten den Aufstrom parallel zu sich selbst in der Richtung der drei Coordinatenaxen um δx, resp. δy und δz verschieben. Würde dabei $J(s)$ um $\delta_x J$, $\delta_y J$, $\delta_z J$ wachsen, so wären die Quotienten: $\delta_x J : \delta x$, $\delta_y J : \delta y$, $\delta_z J : \delta z$ die drei Kräfte, welche auf den Aufstrom als Ganzes in den drei Coordinatenrichtungen wirkten. Allein damit wären nicht die Drehmomente, welche er erfährt, ebensowenig die Kräfte, welche sich seiner Gestaltveränderung entgegensetzen, gefunden.

Um das Problem daher allgemein zu lösen, müssen wir jedem Elemente ds des Aufstroms drei von einander unabhängige Verschiebungen δx, δy, δz in den drei Coordinatenrichtungen ertheilen, wobei wir bloss, um Gleitstellen zu vermeiden, die Gesammtlänge $s = \int ds$ als unveränderlich betrachten. Wir können dann ds unvariirt lassen. Dann ist also die gesammte Arbeit:

75) $$-\mu i i' \delta \int\int \frac{\sigma\, ds\, ds'}{r}.$$

Der andere Stromkreis s' bleibt dabei selbstverständlich ganz unverändert. Nehmen wir an, die gesammte Wirkung, welche der Stromkreis s erfährt, könnte dadurch ersetzt werden, dass auf jedes Element ds eine Kraft wirkte, welche nach den drei Coordinatenaxen die Componenten dX, dY, dZ hat, so müsste diese Arbeit gleich:

76) $$\int (dX\,\delta x + dY\,\delta y + dZ\,\delta z)$$

sein. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert mit Rücksicht darauf, dass alle δx, δy, δz unabhängig sind, die Kräfte dX, dY, dZ. *Ableitung des Ampère'schen Gesetzes.*

Bezeichnen wir das Doppelintegral im Ausdruck 75 mit D, so ist:

77) $$\delta D = \int\int ds\, ds' \frac{-\sigma\delta r}{r^2} + \int\int ds\, ds' \frac{\delta\sigma}{r}.$$

Drückt man r durch x, y, z, x', y', z' aus, so wird das erste Glied gleich einer Summe dreier Glieder $E_1 + E_2 + E_3$, wobei:

$$E_1 = \iint ds\, ds' \frac{-(x-x')}{r^3} \sigma \delta x$$

und E_2 und E_3 hieraus durch cyklische Vertauschung von x, y, z gefunden werden. Ferner findet man leicht:

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \alpha' = \frac{dx'}{ds'}, \quad \varphi = \frac{x-x'}{r} = \frac{dr}{dx} = -\frac{dr}{dx'},$$

$$\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \beta' = \frac{dy'}{ds'}, \quad \chi = \frac{y-y'}{r} = \frac{dr}{dy} = -\frac{dr}{dy'},$$

$$\gamma = \frac{dz}{ds}, \quad \gamma' = \frac{dz'}{ds'}, \quad \psi = \frac{z-z'}{r} = \frac{dr}{dz} = -\frac{dr}{dz'},$$

$$\sigma = \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'},$$

wobei α, β, γ; α', β', γ'; φ, χ, ψ die Richtungscosinus von ds, ds', r sind (s. Fig. 26 Art. 91). Es ist wohl zu beachten, dass man bei Differentiation nach s' nur auf der Curve s' fortschreitet, daher x, y, z constant bleiben; bei der nach s und bei der durch δ angezeigten Variation dagegen bleibt x', y', z' unverändert. Hiernach ist auch das letzte Glied der Gleichung 77 eine Summe $F_1 + F_2 + F_3$, wobei wieder F_2 und F_3 durch cyklische Vertauschung aus F_1 entstehen und:

$$F_1 = \iint \frac{ds\, ds'}{r} \frac{dx'}{ds'} \delta \frac{dx}{ds} = \iint \frac{ds\, ds'}{r^2} \frac{dx'}{ds'} \frac{dr}{ds} \delta x$$

ist, wie die partielle Integration nach s lehrt, da ja bei einer geschlossenen Curve die Ausdrücke für beide Integrationsgrenzen sich aufheben.

Das letzte Integral findet man leicht folgendermaassen. Es ist identisch:

$$\frac{d}{ds'}\left(\frac{x-x'}{r^2}\frac{dr}{ds}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dx'}{ds'}\frac{dr}{ds} - 2\frac{x-x'}{r^3}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + \frac{x-x'}{r^2}\frac{d^2 r}{ds\, ds'}$$

und da die linke Seite über eine geschlossene Curve integrirt verschwindet, folgt:

$$78)\quad \int \frac{ds'}{r^2}\frac{dx'}{ds'}\frac{dr}{ds} = \int ds' \left(-2\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + r\frac{d^2 r}{ds\, ds'}\right)\frac{x-x'}{r^3}.$$

Nun ist wegen $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$:

$$r\frac{dr}{ds} = (x - x')\frac{dx}{ds} + (y - y')\frac{dy}{ds} + (z - z')\frac{dz}{ds} = r\varrho,$$

wobei ϱ der Cosinus des Winkels zwischen ds und der von ds' gegen ds gezogenen r-Richtung ist. Differentiirt man nochmal, indem man auf der Curve s' um ds' fortschreitet, so wird:

$$r\frac{d^2 r}{ds\,ds'} + \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} = -\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} = -\sigma.$$

Die rechte Seite der Gleichung 78 geht daher über in:

$$\int ds'\left(-\sigma - 3\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)\frac{x - x'}{r^3},$$

und da man, wenn ϱ' der Cosinus des Winkels zwischen ds und der von ds' nach ds gezogenen r-Richtung ist, analog mit dem für ϱ gefundenen Werthe hat $dr : ds' = -\varrho'$, so liefert die Gleichung 78:

$$\int \frac{ds'}{r^2}\frac{dx'}{ds'}\frac{dr}{ds} = \int ds'(3\varrho\varrho' - \sigma)\frac{x - x'}{r^3}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $ds\,\delta x$, integrirt nach s, so erhält man F_1; addirt man noch E_1 dazu, so folgt unter Berücksichtigung der für E_1 und F_1 gefundenen Werthe:

$$E_1 + F_1 = \iint ds\,ds'(3\varrho\varrho' - 2\sigma)\frac{x - x'}{r^3}\,\delta x.$$

Der Gesammtwerth von δD entsteht, wenn man hierzu noch $E_2 + F_2$ und $E_3 + F_3$ addirt, welche hieraus durch cyklische Vertauschung von x, y, z entstehen und daher bloss δy und δz enthalten. Setzt man die Summe dieser Ausdrücke in 75 ein und das Resultat dem Ausdrucke 76 gleich, und vergleicht bloss die δx enthaltenden Glieder, so folgt also:

$$dX = \mu i i'\,ds \int ds'(2\sigma - 3\varrho\varrho')\frac{x - x'}{r^3}$$

$$= \mu i i'\,ds \int \frac{ds'}{r^2}(2\sigma - 3\varrho\varrho')\cos(r, x).$$

Ganz analoge Ausdrücke ergeben sich für dY und dZ. Dies sind dem Sinne unserer Gleichungen nach die Kräfte, welche von aussen wirken müssen, um den Aufstrom in Ruhe

zu erhalten. Alle ins Spiel kommenden Kräfte werden also erklärt, wenn man annimmt, dass je zwei Stromelemente ds und ds' in der Richtung ihrer Verbindungslinie eine scheinbare Anziehung von der Stärke:

$$\mu i i' \frac{ds\, ds'}{r^2}(2\sigma - 3\varrho\varrho') \tag{79}$$

auf einander ausüben, worin man das allbekannte Ampère'sche Gesetz wieder erkennt.

Vorzüge der Maxwell'schen Theorie.

Dazu kommt noch, dass unsere Gleichungen auch, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, die Gesetze der Stromverzweigung und stationären Strömung in Flächen und Körpern und wie wir in der nächsten Vorlesung sehen werden, dazu noch die gesammte Elektrostatik ohne neue Hypothesen liefern. Vergleicht man daher unsere Methode mit der Ampère's und seiner Nachfolger, so muss man gestehen, dass Maxwell aus minder zahlreichen und natürlicheren Hypothesen eine grössere Fülle von Resultaten gewinnt, dass also auch schon von diesem Gesichtspunkte allein die Maxwell'sche Theorie der alten vorzuziehen wäre. Aber sie hat noch grössere Vorzüge. Erstens haben ihre Gleichungen eine weit einfachere und naturgemässere Form. Links steht daselbst immer der Differentialquotient einer Grösse nach der Zeit, rechts Funktionen der augenblicklichen Werthe der Grössen. Sie geben uns also ein klares Bild, wie durch die augenblicklichen Werthe die Veränderungen jeder Grösse bestimmt sind, während die alten Gleichungen vollkommen ungeordnet und daher auch viel unbequemer für die Berechnung aller Probleme sind, ausser derjenigen, für welche sie speciell zugeschnitten wurden.

Zweitens sahen wir aber, dass die alten Gleichungen nur für stationäre oder wenigstens nahe stationäre Elektricitätsströmung gelten. Bei sehr raschem Wechsel der Stromintensität gelten ganz andere Gesetze, zu denen wir in Art. 94 übergehen werden. Um hier nur ein Beispiel zu erwähnen, würde ein momentan in einem Draht oder Drahtelemente entstandener Strom auf einen zweiten so lange gar nicht wirken, bis nicht die mit der Lichtgeschwindigkeit von ihm ausgehenden elektrischen Wellen den zweiten Strom

erreicht haben und auch dann würde die Wirkung in den ersten Momenten noch viel complicirteren Gesetzen folgen, bis der Zustand stationär geworden ist, wo dann erst das Ampère'sche Gesetz gilt.[1])

μ im Standard-Medium.

93. Wir kommen nun wieder auf die Betrachtungen des Artikels 42 zurück. Wir definirten dort die (magnetisch) gemessene Stromintensität eins als diejenige, welche einen unendlichen geraden Draht durchfliessend auf die Längeneinheit eines zweiten vollkommen gleichen, gleichdurchströmten, parallelen, in der Distanz eins befindlichen Draht die Kraft 2 ausübt. Wir fanden dies, indem wir die Anziehung zweier Stromelemente gleich:

$$\frac{i\,i'\,ds\,ds'}{r^2}(2\sigma - 3\varrho\varrho')$$

setzten. Wir können auch umgekehrt schliessen, dass das Ampère'sche Gesetz, wenn wir im betreffenden Medium die Stromstärke so definiren, diese Form haben, also:

79) $$\mu = 1$$

sein muss.

Allgemeine Gleichungen für elektrische Schwingungen.

94. Wir gehen nun zur Betrachtung derjenigen Gruppe von Erscheinungen über, welche den Gegensatz zu den bisher betrachteten bilden, nämlich zu dem Verlaufe der mit der Lichtgeschwindigkeit sich ausbreitenden elektrischen Gleichgewichtsstörungen, welche ebenso gut in Nichtleitern, wie in Leitern, ja in ersteren weit ausgiebiger, weil nicht gedämpft, auftreten. Um die Theorie dieser neuen Gruppe specieller Fälle aus unseren allgemeinen Gleichungen herzuleiten, verfahren wir wie folgt.

Wir schliessen wieder die Betrachtung derjenigen Stellen, wo gerade elektromotorische Kräfte thätig sind, aus. Wir haben dann im homogenen Medium die Gleichungen 54, 68, 67 und 71 (*B, C', D'* und *c'* in Art. 88) anzuwenden.

Die Substitution der Werthe 40 (*A*) in die erste der Gleichungen 53 (*B*) liefert uns unter Berücksichtigung der Glei-

[1]) Ueber einen etwas versteckteren Vorzug der Maxwell'schen Theorie vergl. Hertz, Wied. Ann. Bd. 23, S. 84, 1884.

chung 69 und 71 (c und c') genau wie in der vorigen Vorlesung Art. 90 die schon dort gefundene Gleichung:

72) $$4\pi\mu u = -\Delta F.$$

Nach den Gleichungen 63, 68 und 69 (E, C', D') aber ist, wie wir schon in Art. 87 unmittelbar nach Ableitung der Gleichung 68 fanden:

63[a]) $$u = p + \frac{df}{dt} = -C\frac{dF}{dt} - \frac{k}{4\pi}\frac{d^2F}{dt^2}.$$

Dies in Gleichung 72 substituirt liefert uns zunächst die Gleichung für die Wellen der Grösse F:

80) $$\mu k\frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi\mu C\frac{dF}{dt} = \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2}.$$

Es ist bequem f einzuführen, indem man mit k multiplicirt, dann nochmals nach t differentiirt und für $kdF{:}dt$ seinen Werth aus den Gleichungen 68 (C') substituirt. Dies liefert:

81) $$\mu k\frac{d^2f}{dt^2} + 4\pi\mu C\frac{df}{dt} = \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2}.$$

Dieselbe Gleichung nur p oder u für f substituirt (wir wollen sie die Gleichungen 82 und 83 nennen und behufs Raumersparniss gar nicht anschreiben), erhält man übrigens aus 80, die erste wenn man mit C multiplicirt, nach t differentiirt und die Gleichungen 67 (D') beachtet, die zweite allgemeinste folgendermaassen: A) man multiplicirt die Gleichung 80 mit C und differentiirt einmal nach t, B) man multiplicirt dieselbe Gleichung mit $k:4\pi$ und differentiirt zweimal nach t, C) man addirt beide Resultate, D) man berücksichtigt die Gleichung 68, 67, 63 (C', D', E). Dass jede dieser Gleichungen ihr Analogon für die y- und z-Axe hat, bedarf kaum der Erwähnung.

Für u, v, w und F, G, H hatten wir die Gleichungen:

66 (b) $$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

71 (c') $$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0.$$

Die beiden analogen Gleichungen für f, g, h und p, q, r finden wir, wenn wir die letzte Gleichung nach t differentiiren und einmal mit k, das andere Mal mit C multi-

pliciren; das erste Mal haben wir dann noch die Werthe 68 (C'), das zweite Mal die 67 (D') zu substituiren und erhalten:

84) $$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0.$$

85) $$\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0.$$

Dass die Gleichungen 80, 81, 82 und 83 den allgemeinsten Fall einer Wellenbewegung mit Dispersion (verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit für verschiedene Schwingungsdauer) und Absorption (Abnahme der Amplitude während der Fortpflanzung) darstellen, ist bekannt.

Die elektrischen Wellen sind transversal.

Die Gleichungen 66, 71, 84 und 85 zeigen, dass die Wellenbewegung transversal ist. In der That, betrachten wir zuerst Planwellen, die in der Richtung der z-Axe fortschreiten, setzen wir also voraus, dass sämmtliche Grössen nur Funktionen von z und t sind, so liefern die Gleichungen 66, 71, 84 und 85:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Andere Coordinaten, als die z-Coordinaten sollen aber in diesen Ausdrücken überhaupt nicht enthalten sein. Berücksichtigt man dies bei Betrachtung der Gleichungen 80 bis 83, so findet man aus diesen Gleichungen, wie wir es in Artikel 87 für Θ bewiesen, dass überhaupt $h = w = r = H = 0$ sein muss. Weder Strömung noch dielektrische Polarisation noch elektrische Kraft können also eine Componente in der Fortpflanzungsrichtung der Wellen haben. Sind die Wellen nicht plan, so können sie doch in einem sehr kleinen Bezirk im Allgemeinen immer als plan betrachtet werden; sie werden also wieder, etwaige singuläre Stellen ausgenommen, in jedem kleinen Bezirke transversal sein.

Lineare, circulare, elliptische Polarisation.

Die Componenten in den beiden auf der Fortpflanzungsrichtung senkrechten Richtungen sind aber vollkommen unabhängig von einander. Was wir uns immer unter f, g, h, p... vorstellen mögen, jedenfalls können wir senkrecht zum Strahle Linien aufgetragen denken, deren Längen in jedem

Augenblicke die Werthe dieser Grössen darstellen. Die Endpunkte dieser Linien werden dann ganz die Bewegungen machen, die wir den Aethertheilchen in linear polarisirten Lichtstrahlen zuschreiben. Die Endpunkte der Linien aber, welche bei elektrischen Wellen, die in der x-Richtung fortschreiten, Grösse und Richtung der Gesammtpolarisation $\sqrt{f^2 + g^2}$ oder der Gesammtströmung $\sqrt{u^2 + v^2}$ etc. darstellen, werden sich ganz so bewegen, wie Aethertheilchen im elliptisch oder circularpolarisirten Lichte.

Wellen in Isolatoren.

95. Betrachten wir zunächst vollkommene Isolatoren; dieselben werden am bequemsten durch die dielektrischen Polarisationen f, g, h charakterisirt. Da für dieselben $C = 0$, so erhalten wir:

$$86)\qquad k\mu\frac{d^2f}{dt^2} = \Delta f, \qquad k\mu\frac{d^2g}{dt^2} = \Delta g, \qquad k\mu\frac{d^2h}{dt^2} = \Delta h.$$

Es sind dies genau, nur in anderer Weise begründet, die Gleichungen, von denen man in der alten Optik ausgeht. Die Theorie aller optischen Phänomene, die Dioptrik (vergl. Kirchhoff's Vorlesungen über Optik), das Huygens'sche Princip, die Interferenz-, Beugungs- und Polarisationserscheinungen könnten also hier gerade so angeschlossen werden, wie man sie in jedem Lehrbuche der Optik findet. Wir wollen nur ein paar Bemerkungen über Planwellen machen, die in der x-Richtung fortschreiten.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Für diese folgt aus den Gleichungen 86), dass f und g von einander unabhängige Funktionen von $t \pm x\sqrt{\mu k}$ sind. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also für alle Schwingungsdauern dieselbe und hat den Werth:

$$87)\qquad V = 1 : \sqrt{\mu k}.$$

Richtung der magnetischen Schwingungen.

Aus den Gleichungen 68 (C') folgt:

$$F = -\frac{4\pi}{k}\int f dt$$

und aus den Gleichungen 40 (Δ):

$$b = -\frac{4\pi}{k}\frac{\partial}{\partial x}\int f dt.$$

Analoge Werthe haben natürlich G und a. Wenn also:

$$f = A \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi z}{\lambda}\right),$$

$g = 0$ ist, so wird:

$$F = \frac{2A\tau}{k}\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi z}{\lambda}\right), \quad G = 0,$$

$$b = \frac{4\pi A}{\sqrt{k}}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi z}{\lambda}\right), \quad a = 0.$$

Die Schwingungen des Momentenvektors erfolgen also in derselben Ebene wie die der dielektrischen Polarisation mit um $\tau:4$ verschobener Phase, die Schwingungen des Induktionsvektors mit gleicher Phase in derjenigen durch den Strahl gezogenen Ebene, welche senkrecht auf der Schwingungsebene der früheren Grössen steht.[1])

96. Wir wollen nun in der Richtung der z-Axe fortschreitende Planwellen in Halbleitern, oder besser in leitenden Dielektricis behandeln. Zur Charakteristik derselben bestimmen wir wieder f, g h, wofür jetzt die allgemeinen Gleichungen 81 gelten. Die Methode, wie selbe gelöst werden, ist bekannt. Man bestimmt ein partikuläres Integral, indem man setzt: *Wellen in Halbleitern.*

$$f = A e^{\frac{2\pi}{\tau} t i + (\xi + \eta i) z},$$

worin A, τ, ξ, η Constante, $i = \sqrt{-1}$ ist. Die Substitution liefert ohne Weiteres, wenn man mit $V_0 = 1 : \sqrt{k\mu}$ die Geschwindigkeit der Wellen in einem Medium bezeichnet, für welches k und μ dieselben Werthe hätten, aber $C = 0$ wäre:

$$\xi^2 = -\frac{2\pi^2}{\tau^2 V_0^2} + \sqrt{\frac{4\pi^4}{\tau^4 V_0^4} + \frac{16\pi^4 C^2 \mu^2}{\tau^2}},$$

$$\eta^2 = \frac{2\pi^2}{\tau^2 V_0^2} + \sqrt{\frac{4\pi^4}{\tau^4 V_0^4} + \frac{16\pi^4 C^2 \mu^2}{\tau^2}}.$$

Ein reelles partikuläres Integrale ist der reelle Theil der Exponentielle, welcher liefert:

$$f = A e^{\xi z} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \eta z\right).$$

[1]) **Maxwell**, treat. on el. vol. II. art. 790. **Schaik**, Arch. nerl. t. 21, p. 406, 1886.

Es ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$88)\qquad \frac{2\pi}{\eta\tau} = 1 : \sqrt{\frac{1}{2V_0^2} + \sqrt{\frac{1}{4V_0^4} + C^2\mu^2\tau^2}} = V.$$

Für kleine Werthe von C würde dies liefern:

$$V_0 - \frac{V_0^5 C^2 \mu^2 \tau^2}{2}.$$

Dispersion. Es ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit abhängig von der Wellenlänge oder Schwingungsdauer; wir haben Dispersion.

Absorption. Da nur der negative Werth von ξ physikalisch denkbaren Grenzbedingungen genügen kann, sinkt die Amplitude in einer Schicht von der Dicke eins auf das $e^{-\xi}$fache, in einer Schicht von der Dicke einer Wellenlänge um das $e^{-\xi V\tau}$fache. Für kleine C ist:

$$\xi = 2\pi C\mu V_0, \quad \xi V\tau = 2\pi C\mu V_0^2 \tau.$$

Wir haben also Absorption.

Auswählende Absorption. Freilich ist das hier gefundene Gesetz der Abhängigkeit der Dispersion nicht in Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Es kann dies auch nicht anders sein, da, wie die Absorptionsspectra beweisen, hier nicht eine gleichmässige schwache Leitungsfähigkeit der ganzen Substanz, sondern eine Einlagerung kleiner leitender Körperchen in einen Isolator, welchem ganz bestimmte Eigenschwingungen zukommen, wirksam sein muss. Da unsere Gleichungen den Schwingungsgleichungen elastischer Körper ganz analog sind, so lässt sich darauf auch eine ganz analoge Absorptions- und Dispersionstheorie, wie in der alten Optik, aufbauen (s. Literaturübersicht); doch will ich hier darauf nicht eingehen und begnüge mich nachgewiesen zu haben, dass die Theorie schon auf unserem Standpunkte wenigstens qualitativ den Zusammenhang zwischen Absorption und Dispersion wiedergiebt.

Dielektrische Nachwirkung. Ich bemerke noch, dass Maxwell eine ganz andere Erscheinung, die er auch elektrische Absorption nennt und die ich einmal dielektrische Nachwirkung genannt habe, ebenfalls aus der Annahme erklärt, dass in Isolatoren besser leitende Partikelchen eingelagert seien. Auch auf diese in-

teressante Theorie, welche Lodge durch ein sinnreiches Modell erläutert[1]), kann ich hier nicht näher eingehen.

Wellen in Leitern.

Für nicht dielektrisch polarisirbare Leiter, wenn es solche überhaupt giebt, wäre $k = f = g = h = 0$. Wir könnten also die Gleichung 81 nicht verwenden. Da aber die Gleichungen 82 und 83 ganz dieselbe Form haben, so bleibt also auch die Integrationsmethode dieselbe; es wird in den vorhergehenden Formeln $k = 0$, $V_0 = \infty$; p aber tritt an Stelle von f. Die Gleichungen stimmen dann vollständig mit denen überein, welche Fourier für die Wärmeleitung fand; die Elektricität bewegt sich daher in Leitern nach denselben Gesetzen wie die geleitete Wärme.[2]) Die Formel 88 liefert für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit den Werth:

$$V = 1 : \sqrt{C\mu\tau}.$$

Die Amplitude reducirt sich bei Durchwanderung der Längeneinheit auf den $e^{-2\pi\sqrt{C\mu:\tau}}$ fachen Werth; also, da die Wellenlänge $\lambda = V\tau = \sqrt{\tau : C\mu}$ ist, bei Durchwanderung einer ganzen Welle auf den $e^{-2\pi:\lambda}$ fachen Werth. Obwohl hier natürlich λ die Wellenlänge im betreffenden Medium ist, die von der in der Luft total verschieden sein kann, so sieht man doch, dass schon in sehr dünnen Schichten die Wellenbewegung vollkommen erlischt. Während also die stationäre Strömung sich wesentlich auf das Innere der Leiter beschränkt, ist umgekehrt diese Wellenbewegung wesentlich auf das Innere der Isolatoren beschränkt und dringt in die Leiter kaum ein. Doch scheint die Theorie der Schirmwirkung der Metalle gegen die Hertz'schen Schwingungen[3]) sowie die Anwendung auf Kundt's Bestimmung der Brechungsquotienten der Metalle noch grosse Schwierigkeiten zu haben.

[1]) Lodge, Phil. mag. December 1876.
[2]) Maxwell, treatise vol. II. art. 801.
[3]) Ebendort vol. II. art. 647.

Zwölfte Vorlesung.

Elektrostatik.

---

97. Wir kommen nun zum schönsten, aber schwierigsten Kapitel der Maxwell'schen Theorie, zur Lehre von der statischen Elektricität. Die alte Elektricitätstheorie macht sich dieselbe leicht. Sie stellt einfach die betreffenden Gesetze als Erfahrungsthatsachen an ihre Spitze. Hier aber müssen wir sie als letzte Consequenzen aus unseren Gleichungen ableiten.

Damit wir überhaupt freie Elektricität erhalten, müssen in dem Medium einmal äussere elektromotorische Kräfte gewirkt haben. Wir müssen daher zunächst auf die allgemeinen Gleichungen 60 und 64 zurückkommen. Wir finden zunächst aus den Gleichungen 60, 63 und 64 (C, D, E):

$$ku = kp + k\frac{df}{dt} = k\frac{df}{dt} - kC\frac{dF}{dt} + kCX_1$$

$$= k\frac{df}{dt} + 4\pi Cf + kC(X_1 - X_2).$$

Gleichung der freien Elektricität. Bildet man zwei analoge Gleichungen für kv und kw, differenzirt die erste partiell nach x, die zweite partiell nach y, die dritte partiell nach z und addirt, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung 66 (b):

89) $$k\frac{d\varepsilon}{dt} + 4\pi C\varepsilon = \xi,$$

wobei

90) $$\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z},$$

und ausserdem im homogenen Felde:

$$\xi = Ck\left[\frac{\partial(X_2 - X_1)}{\partial x} + \frac{\partial(Y_2 - X_1)}{\partial y} + \frac{\partial(Z_2 - Z_1)}{\partial z}\right]$$

ist. Setzt man ferner:

91) $$\theta = \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz},$$

so findet man aus 63 (E):

92) $$\frac{d\varepsilon}{dt} + \theta = o$$ [1])

---

[1]) Im inhomogenen Felde ergiebt sich:

$$\xi = k\left[\frac{\partial\, C(X_2 - X_1)}{\partial x} + \frac{\partial\, C(Y_2 - X_1)}{\partial y} + \frac{\partial\, C(Z_2 - Z_1)}{\partial z}\right]$$
$$- 4\pi k\left[f\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{k}\right) + g\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{k}\right) + h\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C}{k}\right)\right],$$

für θ und Θ erhält man in ganz ähnlicher Weise:

$$k\frac{d\theta}{dt} + 4\pi C\theta = C\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial k(X_1 - X_2)}{\partial x} + \frac{\partial k(Y_1 - Y_2)}{\partial y} + \frac{\partial k(Z_1 - Z_2)}{\partial z}\right]$$
$$- C\left[\frac{dp}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{C}\right) + \frac{dq}{dt}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{C}\right) + \frac{dr}{dt}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{C}\right)\right]$$

$$k\frac{d^2\Theta}{dt^2} + 4\pi C\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4\pi C X_1 + k\frac{dX_2}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(4\pi C Y_1 + k\frac{dY_2}{dt}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(4\pi C Z_1 + k\frac{dZ_2}{dt}\right) - 4\pi\frac{dF}{dt}\frac{\partial C}{\partial x} - 4\pi\frac{dG}{dt}\frac{\partial C}{\partial y} - 4\pi\frac{dH}{dt}\frac{\partial C}{\partial z}$$
$$- \frac{d^2F}{dt^2}\frac{\partial k}{\partial x} - \frac{d^2G}{dt^2}\frac{\partial k}{\partial y} - \frac{d^2H}{dt^2}\frac{\partial k}{\partial z}.$$

Die Gleichung 92 resp. die daraus für die Trennungsfläche eines Leiters und Nichtleiters folgende versinnlicht Poincaré in seiner *Electricité et optique*, p. 18, indem er f, g, h als die Componenten der Verschiebung der Theilchen eines Fluidums (des *fluide inducteur*), p, q, r aber als die Geschwindigkeitscomponenten der Theilchen eines zweiten Fluidums auffasst. Die in Rede stehende Gleichung besagt dann, dass aus jedem Volumelemente von dem einen Fluidum ein gleiches Volumen ein-, als von dem anderen austritt, dass also beide Fluida für einander undurchdringlich sind. Wir können dann nach Hertz's Vorgang

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}$$

als die Dichte der wahren, dagegen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{k}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g}{k}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h}{k}\right) = \varepsilon_f,$$

als die Dichte der freien Elektricität bezeichnen. Für letztere hat man:

98. Aehnlich wie wir schon für Θ in Art. 87 die Gleichung 70 fanden, folgt aus 89 für den Fall, dass keine äusseren elektromotorischen Kräfte wirken, also:

$$\xi = o$$

ist:

93) $$\varepsilon = C_1 e^{-\frac{4\pi C}{k} t}.$$

Wir können daraus einen ähnlichen Schluss, wie damals für Θ, nun auch für ε ziehen. Falls sich das Medium einmal in dem neutralen Zustande, wo nirgends weder elektrische, noch magnetische Kräfte wirkten, befunden hat und seitdem in einem Punkte desselben keine äusseren elektromotorischen Kräfte wirksam waren, muss daselbst $C_1 = \varepsilon = o$ sein. Dies gilt auch, wenn immer $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$, $Z_1 = Z_2$ war, d. h. wenn, wie die elektromotorischen Kräfte der Induktion, so auch die äusseren elektromotorischen Kräfte gleichmässig auf die dielektrische Polarisation und die galvanische Strömung gewirkt haben. Haben dagegen anders beschaffene äussere elektromotorische Kräfte gewirkt, so kann und wird im Allgemeinen ε einen von Null verschiedenen Werth haben.

Dichte der Elektricität. Wir wollen schon jetzt, natürlich ohne dabei an irgend etwas Materielles zu denken, die Grösse ε als die Dichte der (wahren) Elektricität im betrachteten Punkte bezeichnen. Ist dann $d\tau$ ein Volumelement, welches diesen Punkt enthält, so nennen wir $\varepsilon\, d\tau$ die gesammte in diesem Volumelement enthaltene Elektricität.

Leiter, Isolatoren. 99. In dem Augenblicke, wo die äusseren elektromotorischen Kräfte zu wirken aufgehört haben, wird wieder die Gleichung 93 gelten, es wird also ε in geometrischer Progression und zwar um so rascher abnehmen, je grösser

---

$$k\frac{d\varepsilon_f}{dt} + 4\pi C\varepsilon_f = -\frac{4\pi}{k}\left(f\frac{\partial C}{\partial x} + g\frac{\partial C}{\partial y} + h\frac{\partial C}{\partial z}\right)$$
$$-\frac{1}{k}\left(\frac{df}{dt}\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{dg}{dt}\frac{\partial k}{\partial y} + \frac{dh}{dt}\frac{\partial k}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial C(X_2 - X_1)}{\partial x} + \frac{\partial C(Y_2 - Y_1)}{dy} + \frac{\partial C(Z_2 - Z_1)}{\partial z}.$$

die Leitungsfähigkeit C und je kleiner die Dielekricitätsconstante k ist. Im vollkommenen, nicht dielektrisirbaren Leiter, wo $k = o$ ist, muss daher durchweg $f = g = h = o$ angenommen werden und es kann sich nach der Maxwell'schen Theorie in dessen Innern keine freie Elektricität entwickeln. Nur im vollkommenen Isolator, wo $C = o$ ist, haben wir nach dem Aufhören der äusseren elektromotorischen Kräfte $\varepsilon = C_1$, die etwa entwickelte Elektricität bleibt also in jedem Punkte unverändert; sie kann nicht entweichen. Nur unter dieser Bedingung ist also dauerndes Auftreten freier Elektricität im Innern eines Körpers möglich.

100. Obwohl wir die Gleichungen, welche an der Oberfläche, wo zwei Körper aneinander grenzen, im Allgemeinen von unseren Betrachtungen ausgeschlossen haben, so sollen hier doch die folgenden, darauf Bezug habenden Bemerkungen Platz finden. Wir denken uns solche Grenzflächen immer als continuirliche, aber äusserst dünne Uebergangsschichten und nehmen daher an, dass $f, g, h, u, v, w, p, q, r$ sammt ihren ersten Ableitungen als überall continuirlich betrachtet werden können. Wir wollen nun den Vektor der dielektrischen Polarisation mit $\mathfrak{D}$, den der totalen elektrischen Strömung mit $\mathfrak{C}$, den der galvanischen Strömung mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen (s. Art. 88). Dies sind also vom Punkte, um dessen f, g u. s. w. es sich handelt, aus gezogene Gerade, deren Projectionen auf die drei Coordinatenaxen f, g, h, resp. u, v, w; p, q, r sind. Wir wollen weiter mit $d\tau$ das Volumelement eines beliebigen Systems S von Körpern bezeichnen, welches rings von einer in sich geschlossenen Fläche o umschlossen wird. do sei ein Element derselben, n die an dasselbe nach aussen gezogene Normale.

Unzerstörbarkeit der elektrischen Quantität.

Wir berechnen nun nach dem Vorgange Hertz's das Integrale

$$\frac{d}{dt}\int \varepsilon \, d\tau = -\int \theta \, d\tau,$$

wobei die Integration über den ganzen Raum zu erstrecken ist, der von der Fläche o umschlossen wird. Substituiren wir für ε und θ die Werthe 90 und 91, integriren die nach

x differenzirten Ausdrücke partiell nach x und verfahren ebenso mit y und z, so erhalten wir in bekannter Weise:[1])

$$\frac{d}{dt}\int \varepsilon\, d\tau = -\int \theta\, d\tau = -\frac{d}{dt}\int do\,\mathfrak{D}\cos(\mathfrak{D}, n)$$

$$= \int do\,\mathfrak{K}\cos(\mathfrak{K}, n).$$

101. Sei zunächst das System S rings vom freien Aether umgeben, der sich in sehr grosser Entfernung im neutralen Zustande befindet, so kann die Fläche o so construirt werden, dass jedes Element derselben in Aether von neutralem Zustande liegt. Dann werden $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{K}$ in jedem Elemente do den Werth Null haben. Es ist folglich:

$$\frac{d}{dt}\int \varepsilon\, d\tau = o.$$

Die gesammte, im System enthaltene Elektricität kann sich also nicht ändern. Wird durch äussere elektromotorische Kräfte in einem Punkte Elektricität erzeugt, so muss immer dafür an einer anderen Stelle ein gleiches Quantum der entgegengesetzten Elektricität auftreten und man bemerke wohl, dass alles dies, sowie auch alles noch folgende nicht etwa Postulate sind, die wir der Erfahrung entnehmen, sondern lediglich Consequenzen unserer Gleichungen, die sich in der Erfahrung bestätigen.

Ansammlung der Elektricität an der Oberfläche eines Leiters.

102. Sei nun das früher betrachtete System S ein System von leitenden Körpern, die rings von beliebigen, im Endlichen liegenden Isolatoren umgeben sind, in denen die Fläche o verläuft. Dann ist ebenfalls in jedem Flächenelemente derselben $p = q = r = \theta = \mathfrak{K} = o$, und man gelangt wieder zu dem Resultate, dass die gesammte Menge der Elektricität in dem Körpersysteme unveränderlich bleiben muss.

Haben die äusseren elektromotorischen Kräfte zu wirken aufgehört, so gilt dann im Innern eines jeden mit Leitungsfähigkeit begabten Körpers die Gleichung 93; die da-

[1]) Vergl. Kirchhoff's Vorlesungen über Mechanik, 3. Aufl. S. 112.

selbst ursprünglich etwa vorhandene Elektricität nimmt also je nach der Leitungsfähigkeit rascher oder langsamer ab. Endlich tritt Gleichgewicht ein; dann kann dieselbe nur mehr in vollkommenen Isolatoren und an der Oberfläche der leitenden Körper angehäuft sein, wo wir das Vorhandensein ganz dünner Schichten annehmen, in denen die Grössen k, C und μ variabel sind, weshalb die Gleichung 93 nicht gilt.

Wir wollen diese Schichten als die geladenen Oberflächen bezeichnen. Die Gesetze, nach denen sich die Elektricität im Zustande des Gleichgewichts daselbst ausbreitet, und die ponderomotorischen Kräfte, welche bei Elektricitätsansammlung in Isolatoren und auf der Oberfläche von Leitern auftreten, bilden das Object der Elektrostatik; denselben sollen im Folgenden noch einige Betrachtungen gewidmet werden.

103. In dem Gleichgewichtszustande, welchen wir jetzt betrachten, haben alle elektrischen Ströme aufgehört. Es ist also:

$$u = v = w = p = q = r = \frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} = \frac{dh}{dt} = o.$$

Es ist alles stationär geworden. Wenn man folglich zu verschiedenen Zeiten für einen Augenblick einen immer gleich beschaffenen Solenoidpol in das Feld hineinbringt, so können auf denselben nicht zu einer bestimmten Zeit andere Kräfte, als zu irgend einer anderen Zeit wirken, falls solche Kräfte überhaupt vorhanden sind. Da dieselben aber den Grössen a, b, c proportional sind, so können diese Grössen jedenfalls nicht Funktionen der Zeit t sein. Es muss also sein:

$$\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = \frac{dc}{dt} = o,$$

und die Gleichungen 40 (A) zeigen zunächst, wenn man sie nach t differenzirt, dass

$$\frac{dF}{dt}, \quad \frac{dG}{dt}, \quad \frac{dH}{dt}$$

Componenten und Gleichungen der (inneren) elektromotorischen Kraft.[1])

die partiellen Differentialquotienten einer Funktion ψ nach den Coordinaten sind, welche nur die Coordinaten enthalten kann. Bezeichnen wir diese Grössen mit $-P$, $-Q$, $-R$, so erhalten wir:

$$P = -\frac{dF}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$Q = -\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad .$$

$$R = -\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Im Isolator, für welchen $C = o$ ist, liefern also die Gleichungen 68 (C'):

$$4\pi f = -k\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad 4\pi g = -k\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad 4\pi h = -k\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

(Die Ableitungen von F, G, H nach der Zeit sollen übrigens, auch wenn sie nicht partielle Differentialquotienten nach den Coordinaten sind, mit $-P$, $-Q$, $-R$ bezeichnet werden.) In allen Körpern, für welche C nicht gleich Null ist und die wir deshalb kurz Leiter nennen wollen, obwohl sie auch zugleich dielektrischer Polarisation fähig sein können, hat zu Anfang der Zeit die Gleichung 93 gegolten. Im Gleichgewichtszustande der Elektricität ist $p = q = r = o$ und daher liefern die Gleichungen 67 (D'):

94) $$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = o,$$

oder $\psi = \text{const.}$ In den Leitern ist also auch:

$$4\pi\varepsilon = -k\Delta\psi = o,$$

während in den Isolatoren

95) $$4\pi\varepsilon = -k\Delta\psi$$

in denjenigen Punkten einen von Null verschiedenen Werth haben kann, wo vormals äussere elektromotorische Kräfte thätig waren.

---

[1]) Wenn man die äusseren elektromotorischen Kräfte, wie ich vorschlug, als die galvanischen und querikischen Kräfte bezeichnen würde, so wäre diese etwas unbequeme Unterscheidung zwischen äusserer und innerer elektromotorischer Kraft überflüssig.

104. In einer der oben besprochenen elektrisch geladenen Oberflächen, deren wenn auch sehr kleine Dicke δ heissen möge, ändert sich alles sehr schnell in der Richtung der Normalen. Wählen wir daher diese zur x-Axe, so verschwindet daselbst $\partial g:\partial y$ und $\partial h:\partial x$ gegen $\partial f:\partial x$. Es ist also, wenn do ein Element der Oberfläche und dx ein Dickendifferential vorstellt, welches noch gegen die Gesammtdicke δ der Oberflächenschichte unendlich klein ist, die im Volumelemente $do.dx$ enthaltene Elektricität: *Flächendichte der Elektricität.*

$$\frac{df}{dx}\,do\,dx.$$

Die gesammte, dem Oberflächenelemente do anliegende Elektricität ist also:

$$do\int\limits_x^{x+\delta}\frac{df}{dx}dx = do(f_1-f_0) = -\frac{1}{4\pi}\left(k_1\frac{d\psi}{dn_1}+k_0\frac{d\psi}{dn_0}\right).$$

Die Indices Null und 1 beziehen sich dabei auf die Werthe zu beiden Seiten der Oberflächenschicht; n_0 und n_1 sind die beiden jedes Mal von der Oberfläche gegen das Innere des an der betreffenden Seite anliegenden Körpers hin gezogenen Normalen. Es fällt also n_1 mit der Richtung der positiven x-Axe, n_0 aber mit der Richtung der negativen x-Axe zusammen. Die Grösse

96) $$\eta = -\frac{1}{4\pi}\left(k_1\frac{\partial\psi}{\partial n_1}+k_0\frac{\partial\psi}{\partial n_0}\right)$$

bezeichnen wir als die Oberflächendichtigkeit der Elektricität im betreffenden Elemente der Oberfläche.

Bezieht sich der Index Null auf einen Leiter, so ist, wie wir sahen $d\psi:dn_0 = 0$, daher:

97) $$\eta = -\frac{k_1}{4\pi}\frac{d\psi}{dn_1}.$$

Es sind dies die geläufigen Gleichungen der Elektrostatik.

Dreizehnte Vorlesung.

Ponderomotorische Kräfte elektrisirter Kugeln; deren Abhängigkeit von k.

Elektrostatische Fernwirkung.

105. Wir wollen nun noch die Gesetze der ponderomotorischen Kräfte zwischen elektrisch geladenen Körpern aufsuchen. Wir betrachten zuerst einen ganz speciellen Fall. Ein überall hin unbegrenzter Isolator soll vom neutralen Zustande ausgegangen sein. Nur in gewissen Gebieten R sollen während einer gewissen Zeit äussere elektromotorische Kräfte thätig gewesen sein. Dann soll elektrisches Gleichgewicht eingetreten sein. Innerhalb der Gebiete R ist also dann:

95) $$-k\Delta\psi = 4\pi\varepsilon,$$

während im gesammten übrigen Raume

98) $$\Delta\psi = o \text{ ist.}$$

106. Wir wollen zunächst das Problem noch weiter specialisiren:

Gleichförmig elektrisirte Kugel.

Erstens: Das Gebiet R soll eine sehr kleine Kugel vom Centrum O sein. Die äusseren elektromotorischen Kräfte, welche darin gewirkt haben, sollen nach allen von O ausgehenden Richtungen vollkommen gleichmässig thätig gewesen sein, so dass alles rings um den Punkt O herum vollkommen symmetrisch ist. Eine Spur von Leitung muss dabei das Abfliessen der anderen Elektricität in's Unendliche ermöglicht haben, oder diese muss auf einen Leiter übergegangen sein, der dann mechanisch entfernt wurde. Es ist dann ψ nur Funktion der Entfernung r des Aufpunktes vom Punkte O und muss ausserhalb der Kugel gemäss der Gleichung 98 die Form haben:

99) $$\frac{A}{r} + B,$$

folglich ist:

$$f = \frac{kAx}{4\pi r^3}, \quad g = \frac{kAy}{4\pi r^3}, \quad h = \frac{kAz}{4\pi r^3}.$$

Zwei gleichförmig elektrisirte Kugeln.

Zweitens: Das Gebiet R soll nun aus zwei derartigen Kugeln mit den Centren O und O' bestehen. Die Entfernung

des Aufpunktes von O und O' soll r resp. r' heissen. Wir genügen offenbar den Gleichungen, wenn wir jetzt im ganzen Raume, mit Ausnahme des Innern der Kugeln setzen:

100) $$\psi = \frac{A}{r} + \frac{A'}{r'} + B.$$

Da diese Lösung, sowohl in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes O, als auch in der des Punktes O' unendlich nahe mit der Lösung 99 zusammenfällt, so ist wohl kein Zweifel, dass sie dem Falle entspricht, dass beide Kugeln gleichmässig elektrisirt worden sind. Der exacte Beweis hierfür kann natürlich nur aus den Gleichungen 95 und 96 geliefert werden, und zwar müsste, wenn die Kugeln aus isolirendem Materiale bestehen, die ganze Elektrisirung derselben, also die Werthe von ε und η im Innern und an der Oberfläche der Kugeln gegeben sein.

Durch das Vorhandensein dieser beiden elektrisirten Kugeln erfährt das ganze unendliche Dielektricum eine gewisse dielektrische Polarisation. Um dieselbe zu berechnen, führen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein und bezeichnen die Coordinaten der Punkte O und O' mit $+ b, o, o$ und $- b, o, o,$ so dass die geradlinige Entfernung $O O' = c = 2 b$ ist. Die Coordinaten des Aufpunktes P bezeichnen wir mit $x, y, z;$ die Componenten der dielelektrischen Polarisation daselbst werden die Werthe haben:

101) $$\left\{\begin{aligned} f &= -\frac{k}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{kA}{4\pi r^3}(x-b) + \frac{kA'}{4\pi r'^3}(x+b) \\ g &= -\frac{k}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{kAy}{4\pi r^3} + \frac{kA'y}{4\pi r'^3} \\ h &= -\frac{k}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{kAz}{4\pi r^3} + \frac{kA'z}{4\pi r'^3} \end{aligned}\right. .$$

Die gesammte, durch die dielektrische Polarisation erzeugte Energie ist nach Formel 61 (α in Art. 88):

102) $$\left\{\begin{aligned} \Pi &= \frac{2\pi}{k}\int d\tau\,(f^2 + g^2 + h^2) \\ &= \frac{k}{8\pi}\int d\tau\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] \end{aligned}\right. .$$

Da ausser der dielektrischen Polarisation sonst keinerlei elektrische oder magnetische Störungen im Felde vorhanden sind, so stellt dies offenbar den Gesammtwerth der elektromagnetischen Energie des Feldes dar.

Führt man für f, g, h die obigen Werthe ein, so stellt sich Π als Summe dreier Glieder dar, von denen das erste Π_1 den Faktor A^2, das zweite Π_2 den Faktor A'^2, das dritte Π_3 den Faktor AA' hat. Es ist dann der Gesammtwerth:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

wobei:

103) $$\left\{ \begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{kA^2}{8\pi}\int\frac{d\tau}{r^4} \\ \Pi_2 &= \frac{kA'^2}{8\pi}\int\frac{d\tau}{r'^4} \end{aligned} \right. .$$

Wir berechnen zuerst:

$$\Pi_3 = \frac{kAA'}{4\pi}\int d\tau\,\frac{x^2 - b^2 + y^2 + z^2}{r^3 r'^3}.$$

Behufs Ausführung der Integration wollen wir zur Bestimmung der Lage des Aufpunktes P cylindrische Coordinaten einführen, indem wir setzen:

$$y = \varrho\cos\vartheta \qquad \text{und} \qquad z = \varrho\sin\vartheta,$$

woraus, wenn die Integration nach ϑ sogleich durchgeführt wird, folgt:

$$d\tau = 2\pi\varrho\, d\varrho\, dx.$$

Da im Ausdrucke Π_3 die Grösse unter den Integralzeichen für negative und positive Werthe von x denselben Werth hat, so kann man die Integration bezüglich x von Null bis ∞ statt von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken und mit 2 multipliciren und erhält so:

$$\Pi_3 = kAA'\int\limits_0^\infty dx\int\limits_0^\infty \varrho\, d\varrho\,\frac{x^2 + \varrho^2 - b^2}{\sqrt{(x^2+\varrho^2+b^2)^2 - 4b^2x^2}^{\,3}}.$$

Wir führen hier zunächst statt ϱ die neue Variable

$$u = x^2 + \varrho^2 + b^2$$

ein und erhalten:

$$\Pi_3 = \frac{k}{2} AA' \int_0^\infty dx \int_{x^2+b^2}^\infty du \frac{u - 2b^2}{\sqrt{u^2 - 4b^2x^2}^3}.$$

Das unbestimmte Integrale nach u hat den Werth:

$$-\frac{1}{\sqrt{u^2-4b^2x^2}} + \frac{u}{2x^2\sqrt{u^2-4b^2x^2}} = \frac{1}{2x^2}\frac{u-2x^2}{\sqrt{u^2-4b^2x^2}}.$$

Das bestimmte zwischen den Grenzen $x^2 + b^2$ und ∞ genommene Integrale hat also für $x < b$ den Werth Null, für $x > b$ aber den Werth $1 : x^2$. Es ist also:

$$\Pi_3 = kAA' \int_b^\infty \frac{dx}{2x^2} = \frac{kAA'}{2b} = \frac{kAA'}{c}.$$

Es sollen nun die beiden elektrisirten Kugeln an sich vollkommen unverändert bleiben, nur die Entfernung c ihrer Centra soll um δc abnehmen. Man sieht leicht, dass dann Π_1 und Π_2 vollkommen unverändert bleiben, nur Π_3 wächst um

$$\delta \Pi_3 = \frac{kAA'\delta c}{c^2}.$$

Da sonst keine Energiequelle vorhanden ist, so muss diese Energie durch Arbeit gewonnen worden sein, welche die auf beide Kugeln von aussen wirkenden ponderomotorischen Kräfte geleistet haben. Um also die Centra beider Kugeln in den Punkten O und O' festzuhalten, muss auf jede Kugel von aussen eine ponderomotorische Kraft K wirken, welche die Entfernung c zu verkleinern strebt. Die Arbeit dieser Aussenkräfte bei der Abnahme von c um δc ist also $K.\delta c$, und da diese Arbeit die einzige Quelle für den oben gefundenen Energiezuwachs ist, so muss sie demselben gleich sein, woraus folgt:

104) $$K = \frac{kAA'}{c^2}.$$

Diese Kraft muss von aussen wirkend die beiden Kugeln gegeneinander treiben, um sie in Ruhe zu erhalten; die Kugeln selbst werden sich daher mit einer gleichen Kraft scheinbar abstossen.

Elektricitätsmenge auf einer leitenden Kugel.

107. Nun erst wollen wir zur Berechnung von Π_1 und Π_2 schreiten. Diese Grössen werden unendlich, wenn wir exact bis zu dem Punkt O und O' integriren. Es zeigt uns dies an, dass die Energie des Mediums unendlich werden muss, wenn endliche Elektricitätsmengen in mathematischen Punkten angehäuft werden sollen.

Wir müssen daher jetzt die unmittelbare Umgebung der beiden Punkte O und O' ins Auge fassen. Sei, wie es praktisch am häufigsten vorkommt, sowohl im Punkte O als auch im Punkte O' eine kleine leitende elektrisirte Kugel vorhanden. a und a' seien die Radien der beiden Kugeln; dann kann in deren unmittelbarer Umgebung in der Gleichung 100 das A' enthaltende Glied vernachlässigt werden. Es folgt also für $r > a$:

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{A}{r^2},$$

während man für $r < a$ im Innern eines Leiters ist und also hat:

$$\frac{d\psi}{dr} = O.$$

Wir wollen die Werthe, welche diese beiden Differentialquotienten unmittelbar an der Oberfläche der Kugel annehmen, durch die Indices 1 und Null bezeichnen, so dass man also hat:

$$\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_1 = -\frac{A}{a^2}, \quad \left(\frac{d\psi}{dr}\right)_0 = O.$$

In der Formel 96 ist jetzt zu setzen:

$$\frac{d\psi}{dn_1} = \left(\frac{d\psi}{dr}\right)_1$$

$$\frac{d\psi}{dn_0} = -\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_0,$$

woraus sich ergiebt:

$$\eta = \frac{kA}{4\pi a^2}.$$

Für die gesammte, auf der Kugel befindliche Elektricitätsmenge ergiebt sich also der Werth:

$$E = 4\pi a^2 \eta = kA.$$

Ebenso findet man für die auf der anderen Kugel befindliche Elektricitätsmenge den Werth:

$$E' = kA'$$

und die Formel 104 geht über in:

$$105) \qquad K = \frac{EE'}{kc^2} .$$

Nun kann auch Π_1 berechnet werden. Da sich das Innere der Kugel in normalem Zustande befindet, so liefert die Formel 103:

$$106) \qquad \Pi_1 = \frac{kA^2}{2}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{kA^2}{2a} = \frac{E^2}{2ka} .$$

Man sieht, dass die früher gemachte Annahme in der That berechtigt war, dass Π_1 und Π_2 nicht Funktionen von c sind.

108. Es wird praktisch selten vorkommen, aber immerhin auch möglich sein, dass die beiden Kugeln von derselben Substanz wie der umgebende Raum erfüllt sind, und dass Kräfte thätig waren, welche das Innere dieser Kugeln elektrisirt (z. B. gleichmässig mit Elektricität von der constanten Dichte ε erfüllt) haben. *Elektricitätsmenge in einer isolirenden Kugel.*

Da die Kugeln unendlich klein sind, kann man im Innern der einen immer den Einfluss der anderen vernachlässigen. Es wird daher nach Gleichung 95

$$\Delta\psi = \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} = -\frac{4\pi\varepsilon}{k} = \text{const.}$$

Daher:

$$\psi = -2\pi\varepsilon r^2 : 3k,$$

da ψ für $r = o$ nicht unendlich werden darf und eine additive Constante keine Rolle spielt. Soll jetzt an der Oberfläche der Kugel keine Elektricität angehäuft sein, so müssen die beiden Grössen:

$$\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_0 = -\frac{4\pi\varepsilon a}{3k} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\psi}{dr}\right)_1 = -\frac{A}{a^2}$$

den gleichen Werth haben, woraus folgt:

$$\varepsilon = 3kA : 4\pi a^3.$$

Die gesammte, auf der Kugel befindliche Elektricität aber hat den Werth:

$$E = 4\pi a^3 \varepsilon : 3 = kA,$$

welcher mit dem früher gefundenen übereinstimmt.

Abhängigkeit der Wirkungen von k und μ.

109. Die Formel 105 zeigt, dass die ponderomotorische Kraft dem k verkehrt proportional ist, also in demselben Verhältnisse kleiner wird, je grösser k ist, wenn gleiche Elektricitätsmengen in verschiedenen Medien aufeinander wirken. Wenn man die Versuche, durch welche die statische Einheit der Elektricität bestimmt wird, in anderen Medien als Luft ausführen würde, so würde dieselbe der Wurzel aus k direct proportional, also die Zahl, welche die gleiche Elektricitätsmenge statisch ausdrückt, dieser Wurzel verkehrt proportional herauskommen. Da wir identische Formeln für Magnetpole erhalten werden, so gilt dasselbe bezüglich der Constante μ für Magnetpole, d. h. für Solenoidpole, welche in das neue Medium gebracht werden, ohne dass der Stoff, welcher das Innere der Drahtringe erfüllt, gewechselt wird.

Aus der Formel 79 dagegen folgt, dass die elektrodynamischen und aus Formel 74, dass die Induktionswirkungen gleicher Ströme in verschiedenen Medien dem μ direct proportional, daher die elektrodynamische Stromeinheit $\sqrt{\mu}$ verkehrt proportional ist. Dasselbe gilt natürlich auch von Solenoiden, wenn das Medium sowohl in der Umgebung als auch im Innern beider gewechselt wird. Die Wirkung eines Stromes auf ein Solenoid, in dessen Innern das Medium nicht wechselt (Magnet), also auch eines Solenoids, in dessen Innern das Medium wechselt, auf ein anderes Solenoid, in dessen Innern das Medium nicht wechselt, bleiben unverändert. Die elektromagnetische Stromeinheit aber ist $\sqrt{\mu}$ verkehrt proportional, da die Einheit des Magnetismus dieser Grösse direct proportional ist; je mehr Magnetismus aber, desto weniger Strom braucht man zur Erzielung der gleichen Kraft.

Vierzehnte Vorlesung.

Statisches und magnetisches Maass. Elektrostatische Kräfte allgemein. Magnete. Schluss.

---

110. Es wird bei der Klasse von Erscheinungen, welche wir jetzt betrachten, am naturgemässesten sein, die Einheit von E so zu wählen, dass, wenn jede der Kugeln mit ihr geladen ist, sie in der Distanz 1 die Abstossung 1 in Luft aufeinander ausüben. Dann wird Constante k für Luft den Werth eins haben und man erhält aus 105: *Statisches Maass.*

107) $$K = \frac{E_s E'_s}{c^2}.$$

Der Index s wurde beigefügt, weil wir dieses Maasssystem das statische nennen. Die Constante des Ampère'schen Gesetzes wird dann keinen einfachen Zahlenwerth annehmen; sie ist nach bekannten Methoden bestimmt worden und da diese Bestimmungen alle in das Gewand der alten Theorie gekleidet sind, so muss ich ihre Resultate hier auch vom Standpunkte der alten Theorie vortragen.

111. Ich will da eine kleine Gedächtnisshülfe mittheilen, durch welche man, wenn man gerade kein Lehrbuch zur Hand hat, sofort die Umrechnung des statischen ins magnetische Strommaass im Kopfe ausführen kann. *Umrechnung beider Maasssysteme.*

Wir denken uns zwei statisch gemessene Elektricitätsmengen 1 in der Entfernung $\varrho = 1$. Dieselben stossen sich mit der Kraft 1 ab. Nun sollen sie beide mit der Geschwindigkeit v gleichgerichtet und senkrecht zu ϱ bewegt werden. Sie stellen dann gleichgerichtete Stromelemente von der Länge 1 dar, deren statisch gemessene Stromintensität $i_s = v$ ist.[1])

---

[1]) Wären in einem langen Drahte in Punkten, die den Abstand 1 hätten, je Elekricitätsmengen 1, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegten, so würde daselbst die statische Stromstärke v herrschen. Wäre die Längeneinheit des Drahtes mit der statischen Elektricitätsmenge eins geladen, und würde sich der Draht sammt seiner Ladung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ in seiner Richtung bewegen, so wäre die

Sie üben jetzt auch eine elektrodynamische Anziehung aufeinander aus und diese wird nach dem Grassmann'schen Gesetze gleich der elektrostatischen Abstossung, wenn die magnetisch gemessene Stromintensität gleich 1 ist. Bezeichnen wir daher den Werth, welchen v in diesem Falle annimmt, mit $\mathfrak{V}$, so ist jetzt die magnetisch gemessene Stromintensität $i_m = 1$, die statisch gemessene aber $i_s = \mathfrak{V}$; da aber die Zahlen, welche man erhält, wenn man die Stromintensität einmal in dem einen, das andere Mal in dem anderen Maasse misst, offenbar einander proportional sein müssen, so muss für jeden Strom

$$i_s = i_m \mathfrak{V} \text{ sein.}$$

Da beide Maasssysteme so gewählt sind, dass die Constante des Joule'schen Gesetzes gleich 1 wird, so ist, wenn e die elektromotorische Kraft bedeutet:

$$e_s i_s = e_m i_m \quad \text{oder} \quad e_s = e_m : \mathfrak{V}.$$

Da endlich auch die Constante des Ohm'schen Gesetzes in beiden Maasssystemen gleich 1 ist, so hat man, wenn ω den Widerstand bezeichnet:

$$i_s \omega_s : e_s = i_m \omega_m : e_m, \text{ also } \omega_s = \omega_m : \mathfrak{V}^2.$$

Nun sahen wir, dass nach dem Ampère'schen Gesetze die Anziehung, welche zwei Stromelemente aufeinander ausüben, den Werth hat:

$$\frac{i_m i'_m ds\, ds'}{r^2}\left[2\sigma - 3\varrho\varrho'\right] = \frac{i_s i'_s ds\, ds'}{\mathfrak{V}^2 r^2}\left(2\sigma - 3\varrho\varrho'\right).$$

Vergleicht man dies mit der Formel 79, so findet man, dass die Constante μ für Luft im elektrostatischen Maasse gemessen den Werth $\mu_s = 1 : \mathfrak{V}^2$ haben muss.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen in Luft.

112. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in einem nichtleitenden Dielektricum fanden wir den Werth: $V = 1 : \sqrt{\mu k}.$

Wenden wir das elektrostatische Maasssystem an, so ist für Luft: $\mu_s = 1 : \mathfrak{V}^2$, $k_s = 1$ daher $V = \mathfrak{V}$.

113. Natürlich könnten wir auch das in den früheren Vor-

---

elektrostatische Abstossung auf einen parallelen, gleich geladenen und gleich bewegten gleich der elektrodynamischen Anziehung ihrer Convectionsströme.

lesungen angewendete magnetische Maasssystem gebrauchen. Man kann ja nach dem Vorgetragenen ohne Weiteres $df : dt$, was ja eine Stromstärke darstellt, in magnetischem Strommaasse messen, daraus durch Integration nach t die Grössen f, g, h und folglich auch ε, η und E (z. B. die Ladung eines Condensators) im magnetischen Maasse ausdrücken (vgl. vierte und fünfte Vorlesung).

Würde man diesen Weg einschlagen, so hätte die Constante μ den Werth:

$$\mu_m = 1.$$

Man findet dann aus den Betrachtungen des Art. 111, dass die Constante k der Formel 105 nicht gleich 1, sondern gleich:

$$k_m = 1 : \mathfrak{V}^2$$

ist. Denn die Grössen E und E' dieser Formel verhalten sich wie $\int i\,dt$, also wie i. Wir fanden aber:

$$i_s = i_m \mathfrak{V}, \text{ daher auch } E_s = E_m \mathfrak{V},$$

daher liefert die Formel 107:

$$K = \frac{E_m E'_m \mathfrak{V}^2}{c^2}.$$

Dies mit Formel 105 verglichen, liefert den eben angeführten Werth für k_m. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Luft ergiebt sich jetzt:

$$1 : \sqrt{\mu_m k_m}.$$

Also natürlich derselbe Zahlenwerth wie früher.

Selbstpotential einer elektrisirten Kugel.

Die Formel 106 liefert bei Anwendung des elektrostatischen Maasses:

$$\Pi_1 = E^2_s : 2a,$$

dies ist bekanntlich das Selbstpotential der auf einer Kugel aufgehäuften Elektricität, also die gesammte, zu ihrer Ladung erforderliche Arbeit, welche hier nothwendig gleich der im Medium vorhandenen Energie der dielektrischen Polarisation sein muss, da wir Fernwirkung ausschliessen und im Innern der leitenden Kugel der neutrale Zustand, also keine Energie vorhanden ist.

Allgemeine Berechnung der Fernwirkung statischer Elektricität.

114. Nun können wir leicht die ponderomotorischen Kräfte finden, welche beliebige Elektricitäten auf beliebige andere ausüben. Man denke sich zu diesem Zwecke zwei Systeme elektrischer Ladungen gegeben. Das erste System

soll dadurch bestimmt sein, dass gewisse Volumelemente $d\tau$ gewisse Elektricitätsmengen $\varepsilon_1 d\tau$, gewisse Flächenelemente do ebenfalls Elektricitätsmengen $\eta_1 do$ enthalten; das zweite dadurch, dass gewisse andere Volumelemente Elektricitätsmengen $\varepsilon_2 d\tau$, gewisse Flächenelemente Elektricitätsmengen $\eta_2 do$ enthalten. Das Gesammtpotentiale ψ in einem Aufpunkte ist dann eine Summe, $\psi_1 + \psi_2$, wobei ψ_1 das Potential ist, welches herrschen würde, wenn nur das erste System, ψ_2 wenn nur das zweite System elektrischer Massen vorhanden wäre. Die Gleichung 102 liefert dann wieder:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

wobei:

$$\Pi_1 = \frac{k}{8\pi}\int d\tau \left[\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\Pi_2 = \frac{k}{8\pi}\int d\tau \left[\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\Pi_3 = \frac{k}{4\pi}\int d\tau \left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right].$$

Π_1 ist lediglich von der Lage der elektrischen Massen des ersten, Π_2 von der des zweiten Systems abhängig, Π_3 dagegen stellt die Energie der Wechselwirkung beider Systeme dar.

Bleiben die Massen des ersten Systems gegeneinander unverrückt, ebenso die des zweiten und ändern nur die beiden Systeme ihre relative Lage, so ändert sich daher nur Π_3 und seine Veränderung giebt die dabei geleistete Arbeit.

Die partielle Integration des obigen Ausdruckes für Π_3 aber liefert nach bekannten Methoden:

$$\Pi_3 = -\frac{k}{4\pi}\int do\,\psi_2\frac{d\psi_1}{dn} - \frac{k}{4\pi}\int d\tau\,\psi_2\,\Delta\psi_1$$

$$= \int do\,\eta_1\,\psi_2 + \int d\tau\,\varepsilon_1\,\psi_2,$$

wobei do ein Element einer beliebigen Trennungsfläche zweier Körper, n sowohl auf der einen als auf der anderen Seite die von do weg gegen das Innere des an der betref-

fenden Seite angrenzenden Körpers hin gezogenen Normale vorstellt.

Da nun ψ dem entspricht, was man in der alten Theorie das Potential auf die Elektricitätsmenge 1 oder kurz die Potentialfunktion genannt hat, so ist der zuletzt gefundene Ausdruck das gesammte Potential des einen Systems elektrischer Massen auf das andere. Seine Veränderung drückt die geleistete Arbeit aus. Seine Ableitungen nach den verschiedenen Coordinaten liefern also die Kräfte.

115. Wir wollen nun wieder einen kurzen Blick auf Erscheinungen werfen, die wir im Allgemeinen von der Betrachtung ausgeschlossen haben. Wir denken uns ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Die yz-Ebene soll eine sehr grosse leitende Ebene darstellen. Der Raum, welcher die Punkte umfasst, deren Abcissen zwischen Null und l_1 liegen, soll mit einem Dielektricum erfüllt sein, in welchem k den Werth k_0 hat; ebenso der Raum, welcher die Punkte umfasst, deren Abscissen zwischen $l_1 + d$ und $l_1 + d + l_2$ liegen. Der Raum dagegen, welcher die Punkte umfasst, deren Abscissen zwischen den Grenzen l_1 und $l_1 + d$ liegen, soll mit einem Dielektricum, für welches k den Werth k_1 hat, erfüllt sein; endlich soll die Fläche, für welche x gleich $l_1 + l_2 + d$ ist, die Begrenzungsfläche eines zweiten Leiters sein, welcher sich nach der Seite der wachsenden Abscissen hin erstreckt. Bis auf die Punkte in der Nähe des Randes der leitenden Platten, welchen wir allenthalben unendlich weit entfernt voraussetzen, wird $g = h = 0$, f aber nur eine Funktion von x sein. Es seien alle elektrischen Ströme und Oscillationen abgelaufen, so dass die Gleichungen des Art. 103 gelten. Der Ausdruck $\Delta\psi$ reducirt sich daher auf

Experim. Bestimmung der Dielektricitätsconstante.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}.$$

Beide Dielektrica sollen aus dem normalen Zustande, ohne dass im Innern derselben durch Reibung etc. Elektricität entwickelt wurde, in ihren jetzigen Zustand übergegangen

sein. Dann ist nach dem Gesagten daselbst überall $\varepsilon = 0$; daher nach Gleichung 98 auch

108) $$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0.$$

Wenn wir die Grenzschichten als dünne Uebergangsschichten auffassen, so gilt das Gleiche auch von jedem Punkte im Innern einer Grenzschicht. Ueberall ist $\varepsilon = 0$; daher muss, wenn die Schichtendicke sehr klein wird, auch $\eta = 0$ sein. Die letztere Bedingung liefert mit Rücksicht auf die Gleichung 96:

109) $$k_0 \frac{d\psi}{dn_0} + k_1 \frac{d\psi}{dn_1} = 0,$$

welche Gleichung auch bei allen anderen Problemen an der Trennungsfläche zweier Dielektrica erfüllt sein muss, wenn daselbst niemals durch Reibung etc. Elektricität entwickelt wurde. Da $d\psi : dn$ an der Grenzschicht einen endlichen Sprung macht, muss ψ selbst continuirlich sein. Sei für $x = 0$, $\psi = 0$; für $x = l_1 + l_2 + d$ aber habe ψ einen gegebenen Werth Ψ. Den Werth des ψ für $0 < x < l_1$ bezeichnen wir mit ψ_1, dann ist also:

$$\psi_1 = Ax.$$

Für $l_1 < x < l_1 + d$ muss ψ die Form $\psi_2 = Bx + C$ haben. Für die Ebene $x = l_1$ ist:

$$\frac{d\psi}{dn_0} = -\frac{d\psi_1}{dx} = -A, \qquad \frac{d\psi}{dn_1} = \frac{d\psi_2}{dx} = B,$$

daher liefert die Gleichung 109:

$$k_1 B - k_0 A = 0.$$

Da ψ selbst continuirlich ist, so folgt:

$$A k_1 l_1 = A k_0 l_1 + C k_1.$$

Wendet man dieselben Bedingungen auf die Ebene $x = l$ an, so ergiebt sich für:

$$l_1 + d < x < l_1 + d + l_2$$

für ψ der Werth:

$$\psi_3 = Ax + Ad\frac{k_0 - k_1}{k_1};$$

Daher wird:

$$k_1 \Psi = A k_1 l + A k_0 d,$$

wobei $l = l_1 + l_2$ gesetzt wurde. Da in der Ebene $x = l + d$ wieder ein Leiter beginnen soll, so ist die auf der Fläche $\mathfrak{F}$ desselben angehäufte Elektricität nach Gleichung 97 zu berechnen und hat den Werth:

$$E = \eta \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \frac{k_0}{4\pi} \frac{d\varphi_3}{dx} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{F} A k_0.$$

Daher ist:

110) $$\frac{\Psi}{E} = \frac{4\pi}{\mathfrak{F}} \left(\frac{l}{k_0} + \frac{d}{k_1} \right).$$

Dieser Quotient heisst die reciproke Capacität des aus beiden leitenden Platten zusammengesetzten Condensators, wenn die gesammte Fläche jeder Platte gleich $\mathfrak{F}$ wäre. Ist das erste Dielektricum Luft und misst man im elektrostatischen Maasse, so wird:

$$k_0 = 1$$

und man findet daher für die reciproke Capacität

$$\frac{\Psi}{E} = \frac{4\pi}{\mathfrak{F}} \left(l + \frac{d}{k_1} \right).$$

Hätte k_1 denselben Werth, wie für Luft, so wäre die reciproke Capacität:

$$\frac{\Psi}{E} = \frac{4\pi}{\mathfrak{F}} \left(l + d \right).$$

Der Umstand, dass ein Theil der Zwischenschicht durch ein von Luft verschiedenes Dielektricum gebildet wird, hat also denselben Effect, als ob die Dicke d der Schicht, welche von dem Dielektricum erfüllt wird, im Verhältnisse $1 : k_1$ vermindert wäre. Ist bei unveränderter Distanz der leitenden Platten der Zwischenraum zwischen denselben einmal ganz mit Luft, das andere Mal ganz mit jenem von Luft verschiedenen Dielektricum erfüllt, so ist die Capacität im zweiten Falle k_1 mal so gross, worauf bekanntlich die einfachste Bestimmungsmethode der Dielektrisirungszahl oder Dielektricitätsconstante k beruht.

Magnetisirungsgleichungen.

116. Setzen wir:

111 (F) $\alpha = \frac{a}{4\pi\mu}$, $\beta = \frac{b}{4\pi\mu}$, $\gamma = \frac{c}{4\pi\mu}$,

so erhalten wir für diese Grössen ganz ähnliche Gleichungen, wie die soeben discutirten für einen vollkommenen Isolator bei Abwesenheit äusserer elektromotorischer Kräfte geltenden, nur dass an Stelle von f, g, h, P, Q, R, $k:4\pi$, ψ jetzt der Reihe nach treten a, b, c, α, β, γ, $4\pi\mu$, φ. Ausserdem erscheint in den Gleichungen, welche wir die Stokes'schen nannten, das Zeichen verkehrt, als ob das Coordinatensystem in sein Spiegelbild verkehrt wäre und in den Dielektrisirungs- und Magnetisirungsgleichungen bei den Constanten der Faktor 4π mit $1:4\pi$ vertauscht. Man hat nämlich:

$$A)\quad \frac{da}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{dy}, \qquad C')\quad 4\pi f = kP,$$

$$B')\quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \qquad F)\quad \frac{a}{4\pi} = \mu\alpha.$$ [1]

Magnetismus. Dies beweist, dass die Wirkung von Solenoidpolen in Medien, wo die Constante μ verschiedene Werthe hat, in ganz analoger Weise modificirt wird, wie die Wirkung der freien Elektricität der Medien mit verschiedenen k. So sahen wir, dass die Trennungsfläche zweier Medien, in denen k verschiedene Werthe hat, unter dem Einflusse elektrischer Kräfte sich so verhält, als ob dort fern wirkende Elektricität vorhanden wäre; analog wird die Trennungsfläche zweier Medien mit verschiedenen Werthen von μ sich so verhalten, als ob dort Solenoidpole (Magnetismen) vorhanden wären.

Wir nannten f, g, h die Componenten der dielektrischen Polarisation oder des dielektrischen Momentes der Volumeinheit, P, Q, R die Componenten der elektrischen Kraft (wirkend auf die Elektricitätsmenge 1), ψ das elektrische

---

[1]) Ueber diese Analogie vgl. Rowland, *Amer. journ. of math.*, vol. II, p. 354; vol. III, p. 89, 1879 und 1880.

Potentiale (ebenfalls auf einen Aufpunkt, in dem sich die Elektricitätsmenge 1 befindet), k die Dielektrisirungszahl oder Dielektricitätsconstante. Gerade so sollen jetzt α, β, γ die Componenten der magnetischen Polarisation oder des magnetischen Momentes der Volumeinheit, a, b, c die der magnetischen Kraft, φ das magnetische Potential, μ die Magnetisirungszahl oder Magnetisirungsconstante heissen. An Stelle der statischen Elektricität tritt aber jetzt die Wirkung von Solenoidpolen. Permanente Magnete denken wir uns immer als Systeme von Molekülen, die solenoidartig von elektrischen Strömen umflossen sind.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in Isolatoren können wir jetzt schreiben:

$$V = \mathfrak{V} : \sqrt{k_e \mu_m},$$

daher für die Brechungsexponenten:

112) $$\mathfrak{V} : V = \sqrt{k_e \mu_m}.$$

Wir haben nun die Formeln entwickelt und uns so weit orientirt, dass wir deren Bedeutung kennen gelernt, uns von ihrer Uebereinstimmung mit der Erfahrung im Allgemeinen überzeugt und sie zur Anwendung auf sämmtliche Probleme der Elektrostatik und Elektrodynamik, der Lehre von den elektrischen und optischen Schwingungen zurecht gelegt. Wir haben gewissermaassen die Tafel gedeckt, die Speisen zubereitet und ab und zu verkostet; haben aber keine Zeit mehr, uns zu Tische zu setzen.

Erster Anhang.

Literaturübersicht.

Leider fehlte es mir an Zeit und Material, um diese Uebersicht vollständig zu machen; hätte ich dem Vorwurfe der Unvollständigkeit und Uncorrectheit entgehen wollen, so wäre mir nichts übrig geblieben, als sie ganz auszulassen, wofür mir doch kaum alle Leser Dank gewusst hätten. Auf fehlendes bitte ich mich aufmerksam zu machen.

I. Lehrbücher, die Maxwell's Elektricitätstheorie mehr oder minder eingehend behandeln.

Maxwell, A treatise on electricity and magnetisme. Oxford, Clar. press. 1881. Deutsch von Weinstein. Berlin, Springer 1883.

—— An elementary treatise on electricity. Oxford, Clar. pr. 1888. Deutsch von L. Grätz. Braunschweig, Vieweg 1883.

Wiedemann, G., Lehre von der Elektricität, a. a. O. IV. p. 1159 u. 1184. Braunschweig, Vieweg 1885.

Poincaré, Electricité et optique. Paris, Carré 1890.

Gordon, J. E. H., a physical treatise on electr. and magn. London, Sampson Low. 1880.

Tumlirz, die elektromagnetische Theorie des Lichts. Leipzig, Teubner. 1883.

Mascart und Joubert, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Deutsch von Levy. Berlin, Springer. 1886.

Grimaldi, G. P., La teoria elettromagnetica del Maxwell e le sperienze di H. Hertz. Roma, tip. dell' Acc. dei Lincei; 1889. (40 pag.) (Leichtverständl. historische Darstellung.)

II. Abhandlungen über die Grundlagen der Maxwell'schen Theorie.

Faraday, Experimental researches on Electricity. 3 vols. London 1839—55 (oder Neudruck).

Maxwell, on Faraday's lines of force. Scient. Pap. Cambridge, Univ. press, 1890. I. p. 155. Cambr. Phil. S. Transact. vol. X. p. 1. geles. 10./12. 1855.

Maxwell, On a method of drawing the forms of F. lines of force without calc. Scient. Pap. I p. 241. Brit. Ass. Rep. 1856.
—— On physical lines of force, Scient. Pap. I. p. 451; Phil. Mag. (4) vol. **21.** p. 161, 281, 338, 1861; **23.** p. 12, 85, 1862.
—— A dynamical theory of the electromagn. field, Scient. Pap. I. p. 526. Roy. Soc. Trans. vol. 155, p. 459. gel. 8./12. 1864.
—— On the theory of maintenance of el. curr. by mech. work without use of perm. magnets; Scient. Pap. II. p. 79. Proc. R. S. 1867.
—— Experiment in magn. electr. induction; Scient. Pap. II. p. 121. Phil. Mag. 1868.
—— On a meth. of m. a. d. comparison of electrostat. with electromagn. force, w. a note on the electromag. theory of light; Scient. Pap. II. p. 125. Lond. Phil. Transact., 158. 1868.
—— On the induction of el. current in a inf. plane sheet of u. cond. Scient. Pap. II. p. 286. Proc. R. S. 1872.
—— On action in distance, Scient. Pap. II. p. 311. Proc. R. Inst. vol. **7.**
von Helmholtz, Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende, leitende Körper. Verh. d. naturh. Vereins zu Heidelberg, 21. Januar 1870. Borch. Journ. **72.** p. 57. 1870. Fortgesetzt: ebenda **75.** p. 35. 1872. **78.** p. 273. 1874. Berl. Ber., 18. April 1872, 6. Febr. 1873, 17. Juni 1875. — Wiss. Abhandlungen Bd. I. S. 545.
Stefan, Ueber die Gesetze der magnetischen und elektrischen Kräfte in magn. und el. Medien und ihre Beziehung zur Theorie des Lichtes. Sitzungsber. der Wien. Akad. **70.** p. 589. 1874.
Rowland, On the general equations of electromagn. action. Amer. Journ. of math. Vol. II. p. 354. 1879. Vol. III. p. 89 Phil. Mag. (4) **50.** p. 257. 1876. Sill. J. (3) **10.** p. 325. 451. 1875.
J. J. Thomson, Einwände gegen Rowland. Nature **24.** p. 204. 1881.
Hertz, Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. Gött. Nachr. März 1890. Wied. Ann. **40.** p. 577. 1890.
—— Dass. für bewegte Körper. Wied. Ann. **41.** p. 369. 1890.
E. Cohn, Systematik der Elektricitätslehre. Wied. Ann. **40.** p. 625. 1890.
Heaviside, On electromagnetic waves. Electrician 3 Jan. 1885 Phil. Mag. Febr. 1888. Phil. Mag. (5) **6.** p. 177. 1878. **24.** p. 479. 1887. **25.** p. 130. 202. 379. 1888. **26.** p. 360. 434. 488. 1888. **27.** p. 89. 1889.

III. Andere auf die allgemeine Maxwell'sche Theorie Bezug habende Abhandlungen.

Beltrami, Interpret. mec. delle formole di Maxwell. Mem. Istit. di Bologna (4) **7.** 38. 1886. Nuov. Cim. (3) **20.** p. 5.
Cesàro, Roma, Acc. d. Lincei **5.** p. 199. 1889. An d. vorige anschliessend.

Blondlot, Elementare Ableitung der Spannung und des Druckes im elektrischen Felde. Journ. de phys. (6) **2.** p. 507. 1887.

Desaulx, Ann. d. l. soc. scient. de Brux. **12.** 1887/8. (Aehnliches).

Adler, Zwangszustand im elektrischen Felde. Wiener Sitzungsber. **89.** p. 594. 1884. **95.** p. 50. 180. 1887. **96.** p. 1037. 1305. 1887.

Seydler, Elektrische Spannungstheorie vom Standpunkte der Elasticitätslehre. Ber. der böhm. Ges. der Wissensch. 1882, 7. Dec. 1883.

Grinwis, Einfluss eines Leiters auf die Energievertheilung im Felde. Arch. neerl. **21.** p. 251. 1887.

L. Lodge, Mech. illust. of passage of Electr. Phil. Mag. Nov. 1876, of Thermoelectr. Dec. 1876.

—— Modell d. elektr. Absorpt. Phil. Mag. (5) **2.** p. 353. 524. 1876.

Grätz, Notiz über die Maxwell'schen Molekularwirbel. Wied. Ann. **25.** p. 165. 1885.

Poynting, Zusammenhang zwischen elektrischen Strömen, elektrischen und magnetischen Verschiebungen. Lond. Proc. R. S. **38.** p. 168. 1885.

J. J. Thomson, Ist die Annahme Maxwell's richtig, dass sich die Elektricität wie eine incompressible Flüssigkeit verhält? Proc. Lond. Math. Soc. **19.** p. 520. 1889.

Poynting, Theorie der el. Absorpt. Phil. Mag. (5) **21.** p. 419. 1886.

Rowland, Theorie d. el. Absorption. Amer. Journ. of math. **1.** p. 53. 1873.

Fernwirkung erlöschender Ringmagnete. Hertz, Wied. Ann. **23.** p. 84. 1884. Aulinger **27.** p. 119. 1886. Lorberg **27.** p. 666. 1886. Boltzmann **29.** p. 598. 1886. **31.** p. 139. 1887.

El.-dyn. Wirkung von Convectionsströmen. Rowland, Berl. Ak. März 1876. Pogg. Ann. **158.** p. 487. 1876. Lecher, Rep. der Phys. **20.** p. 151. 1884. Röntgen, Berl. Ber. 19./1. 1888.

El.-dyn. Wirk. veränderl. diel. Polar. Röntgen, Berl. Ak. 26. Febr. 1885.

Zur Schlussbemerkung von Art. 33. Colley, Wied. Ann. **17.** p. 55. 1882. **18.** p. 704. 1883. Borgmann, J. d. phys. Ges. zu Petersburg. **13.** p. 414. 1881. **14.** p. 15. 260. 1882.

Wirk. von Inductionsströmen auf stat. El. Lippmann, Par. C. R. **89.** 21. Juli 1879. Lodge, Proc. Phys. Soc. Lond. **10.** p. 116. 1889.

Modelle zur Veranschaulichung.

Fitzgerald, Modell f. einige Eigenschaften d. Aethers (Räder mit elastischen Schnuren verbunden). Dubl. Proc. R. S. p. 407. 1885.

Sir W. Thomson, Veranschaulichung der mechanischen Theorie der Induction in Körpern durch Flüssigkeitswirbel. Rep. Brit. Ass. 1888. p. 567. 570.

L. Rayleigh, Modell der Maxw. Theorie. Proc. Phys. Soc. Lond. **10.** p. 434, Nov. 1890.

Gwyther, Schwingungsgleichungen des Aethers. Cambr. Proc. Phil. Soc. **5.** 280. 1885. Vgl. auch oben Lodge.

IV. Andere mechanische Electricitätstheorien.

Helm, Aether in Leitern flüssig, in Isol. fest; bewegte gelad. Körper sind fortschreitende Verflüssigungen. Wied. Ann. **14.** p. 149. 1881.

Theorien, die nur auf der Hypothese fussen, dass die elektrische Fernwirkung Zeit braucht.

Gauss, Briefwechsel. Werke. **5.**

Riemann, Pogg. Ann. **131.** p. 237.

Lorenz, Pogg. Ann. **118.** p. 111. 1863. **121.** p. 579. 1864. **131.** p. 243. Wied. Ann. **7.** p. 161. 1879.

Karl Neumann, Die elektrischen Kräfte. Leipzig, Teubner. 1875. Principien d. Elektrodynamik. Tübingen 1868. Clebsch Ann. **1.** p. 317. 1869.

Loschmidt, Wien. Ber. **58.** p. 17. 1868.

Edlund, Théorie des phénomènes électriques; Mém. de l'Ac. r. de Suède. XII. 1873. N. 8.

Theorien, die auf Analogie mit Flüssigkeitsströmen beruhen.

Loschmidt, Wiener Ber. **58.** p. 596. 1868.

Decharme, Par. C. R. **94.** p. 440. 643. 1882. **95.** p. 87. 1882. Ann. de chim. (5) **29.** p. 404. 1883.

Secchi, Die Einheit der Naturkräfte. Leipzig 1876.

Boulanger, Lum. élect. **20.** p. 241. 1886.

Wirbeltheorien der magnetischen und elektrischen Kräfte.

Hankel, Theorie der elektrischen Erscheinungen. Pogg. Ann. **126.** p. 440. 1865. **131.** p. 607. 1867.

W. M. Hicks, Rep. Brit. Ass. 1888. p. 577.

Euler's Briefe, deutsch von Kries. 1794. 3. Brief. p. 190—197.

Bjerknes, Paris, C. R. **88.** p. 165. 280. **89.** p. 144. 1879. **93.** p. 303. Nat. **24.** p. 360. 1881.

Challis, Phil. Mag. (4) **43.** p. 401. 1872.

Thomson, Phil. Mag. (4) **7.** p. 502. **8.** p. 42. 1854.

Ermacora sopra un modo ... Padua 1882.

Ledieu. Paris. C. R. **95.** p. 669. 753. 1882.

Reynard, Ann. d. chim. (4) **19.** p. 272. 1870.

Moutier, Ann. d. chim. (5) **4.** p. 267. 1875.

Glazebrook, Elektrodynamische Wirbeltheorie. Phil. Mag. (5) **11.** p. 397. 1884.

(Vergleiche auch die letzten unter III citirten Abhandlungen.)

V. Ueber elektrische Schwingungen im Allgemeinen.

Allgemeine Theorie.

Thomson, Phil. Mag. (4) **5.** p. 393. 1855.

v. Helmholtz, Koosen, Pogg. Ann. **83.** p. 505. **91.** p. 258. 427. 446. 1854. Erhalt. d. Kraft. p. 44. Naturh. V. zu Heidelb., April 1869. Wiss. Abh. I. Bd. p. 12.

Kirchhoff, Ueb. d. Beweg. der El. in Drähten. Pogg. Ann. **100.** p. 193. 351. 1857. **121.** p. 551. 1864. — Gesamm. Abh. S. 131.

Weber, Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. **6.** p. 569. 1864.

Roch, Beweg. d. El. in Leitern. Borch. J. **61.** p. 295. 1863.

Weingarten, Bemerk. dazu. Borch. J. **63.** p. 145. 1864.

Lorberg, Beweg. d. El. in nicht linearen Leitern, bes. el. Oscillationen in einer Kugel. Borch. J. **71.** p. 53. 1870.

Glaisher, El. motion in spheres. R. S. Trans. 1883. Bernstein, Pogg. Ann. **142.** p. 54. 1871; Berl. Ber., Juli 1871; Mouton, Par. C. R. **82.** p. 84. 18.

Stefan, Wien. Ber. **95.** p. 917. 1887. Wied. Ann. **41.** p. 400. 421.

Thomson (Zunahme des Widerstandes bei sehr raschen Schwingungen). Analogie der Dielektrica mit zähen Flüssigkeiten. Lum. él. **31.** p. 241. 1889.

J. J. Thomson, el. Schwingungen im cylindrischen Conduct. Lond. Proc. Math. Soc. **17.** p. 310. 1886.

Heaviside, über Blitzableiter, rasche electr. Wellen dringen nicht in den Leitungsdraht ein. Electrician Jan. 1885. Phil. Mag. (5) **25.** p. 153. 1888.

Poynting, Aehnliches. Phil. Trans. **2.** p. 277. 1885.

Lodge, Phil. Mag. (5) **26.** p. 217. 1888.

Theorie der Hughes'schen Inductionswage.

Hughes, Lond. Proc. R. S. Mai 1879. Phil. Mag. (5) **8.** p. 50. 1879.

Lodge, Phil. Mag. (5) **9.** p. 123. Febr. 1880.

Lord Rayleigh. Rep. Brit. Ass. 1880. p. 472.

Oberbeck, Wied. Ann. **31.** p. 812. 1887.

Beobachtung elektrischer Schwingungen an Leydener Flaschen.

Feddersen, Beiträge zur Kenntniss des el. Funkens. Diss. Kiel 1857. Pogg. Ann. **103.** p. 497. 1858. **108.** p. 497. 1859. **112.** p. 452. 1851. **113.** p. 437. 1861. **116.** p. 132. 1862. **130.** p. 439. 1867. Abh. Sächs. Ges. **11. 13.**

Palzow, Pogg. Ann. **112.** p. 567. 1861. **118.** p. 178. 357. 1863.

v. **Oettingen**, Pogg. Ann. **115.** p. 513. 1862. Jubelb. p. 269. 1874. Wied. Ann. **2.** p. 305. 1877. **34.** p. 570. 1888. **40.** p. 83 (Interferenz oscill. Entlad. v. Leydn. Flaschen).

Miesler, Bei eingeschalteten dünnen Drähten stimmt die Theorie. Wien. Ak. **99.** p. 579. 1890.

Elektrische Schwingungen in Drahtspulen und Condensatoren.

Schiller, Pogg. Ann. **152.** p. 535. 1874.

Oberbeck, Wied. Ann. **17.** p. 816. 1040. 1882. **19.** p. 213. 625. 1883. **21.** p. 139. 672. **22.** p. 73. 1884. **26.** p. 245. 1885. **28.** p. 335. 1886. Berl. Ak. 1882. 1883.

Winkelmann, Wied. Ann. **20.** p. 91. 1883.

Klemencic, Exner's Rep. **22.** p. 587. Wien. Ak. **93.** p. 470.

Hieke, Wien. Ak. **96.** p. 134. 1887.

Colley (Sehr leichter Magnetspiegel schwingt mit; Anwendung zur V-Bestimmung) Wied. Ann. **26.** p. 432. 1885. **28.** p. 1. 1886.

Bernstein, Pogg. Ann. **142.** p. 54. 1871. Berl. Ber., Juli 1871.

Mouton, Par. C. R. **82.** p. 84. 1876.

VI. Abhandlungen über Hertz'sche Schwingungen.

a) Vorwiegend experimentellen Inhalts.

Hertz, Berl. Ak. 9. Febr., 13. Dec. 1888. Wied. Ann. **34.** p. 155. 273. 551. 609. 1888. **36.** p. 1. 769. **37.** p. 395. 1889.

Fitzgerald, Durch Entladung eines Accumulators entstehen elektrische Wellen von 10 m Länge. Rep. Brit. Ass. 1883. p. 405.

— Energie der elektrischen Strahlen. Nat. **29.** p. 167. 1884. Rep. Brit. Ass. 1883. p. 404. Nat. **41.** p. 295. 1890.

Sarasin et de la Rive propag. de l'ond. hertzienne. Die Wellenlänge hängt ab von der Schwingungsdauer des Secundärinductors. Arch. scienc. phys. Genève, (3) **23.** p. 113. 557. 1890. Par. C. R. 1891.

Cornu, Darauf gegründete Zweifel. Par. C. R. **110.** p. 75. 1890.

Joubert, Electricien. **6.** p. 318. 1889.

Rubens und Ritter, Beobachtung durch Froschschenkel und Messung durch Bolometer. Wied. Ann. **40.** p. 53. 55. 1890. **42.** p. 154. 1891.

Rubens, Studium der Energievertheilung in den Schwingungen mit Bolometer. Wied. Ann. **42.** p. 154. 1891.

Bartoniek, Beobachtung durch gerissene Glühlampen. Math. Ber. aus Ungarn **7.** p. 217. 1890. Beibl. **14.** p. 654.

Lecher, Beobachtung durch Geissler'sche Röhren, welche leuchten, wenn eine verschiebbare Ueberbrückung gerade auf den Knoten kommt, auch Bestimmung von Dielektricitätsconstanten. Wien. Ak. **99.** p. 357. 480. 1890. Wied. Ann. **41.** p. 850. 857. 1890.

Boltzmann, Beobachtung durch das Elektroskop. Wied. Ann. **40.** p. 399. 1890.

Classen, Beförderung der Funken durch einen Luftstrom. Wied. Ann. **39.** p. 647. 1890.

Wichert, Beobachtung durch das Mikroskop. Wied. Ann. **40.** p. 640. 1890.

K. Waitz, Wellenlängebestimmung durch Abgleichung einer Zweigleitung, sodass die Funkenintensität ein Minimum wird. Wied. Ann. **41.** p. 435. 1890.

Elsass, Die Enden zweier symmetrischer Leiter werden mit einem Telephon verbunden. Wied. Ann. **41.** p. 833. 1890.

Dragoumis, Beobachtung durch Geissler'sche Röhren. Nat. **39.** p. 548. 1889.

Trouton, Reflection und Brechung an Paraffin-, Wasser-, Metallwänden. Nat. **39.** p. 391. **40.** p. 398. 1889. Electrician **25.** p. 556. 1890.

Lodge und Howard, Concentration durch Linsen. Phil. Mag. Juli 1889. Proc. Phys. Soc. Lond. **10.** p. 143.

Gregory, Beob. d. Verläng. eines durch Hertz's Schwing. erhitzten feinen Drahtes. Proc. Phys. Soc. London. **10.** p. 290. 1890.

Blyth, Messung durch das Elektrometer. Electrician **24.** p. 442. 1890.

Klemencic, Messung mit Thermoelementen. Reflection am Schwefel. Wien. Ak. **99.** p. 725. 1890. Wien. Anzeig. Februar 1891.

Zickermann, Prüfung der Resonanz bei Hertz's Schwingungen. Dissert. Greifsw. 1889.

W. König, Der Oberflächenschiller von PtCy und J ist Hertz's Gitterpolarisatoren analog. Verh. Phys. Ges. Berl. **8.** p. 36. 1889.

Sarasin et de la Rive, Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Luft ist gleich der an einem Drahte. Par. C. R. 31. mars 1891.

Hagenbach und Zehnder, Hertz's Anschauungen wird widersprochen. Verh. d. naturf. Ges. zu Basel. **9.** p. 509. 1891.

b) Theorie der Hertz'schen Schwingungen.

Hertz, Wied. Ann. **31.** p. 421. 543. 1887. **36.** p. 1. 1889.

König, Wied. Ann. **37.** p. 651. 1889.

Poynting, Uebertrag. der Energie im el.-magn. Felde. Lond. Phil. Trans. 1884. p. 343.

J. J. Thomson, El. Schwingungen in der Kugel. Proc. Lond. math. Soc. **15.** 1884.

Lodge, El. Schwingungen in leitenden Kugeln. Nat. **41.** p. 462. 1890.

J. J. Thomson, Durch Einfluss der Zimmerwände kann die Geschwindigkeit der Fortpflanzung an einem Drahte verschieden von der in Luft ausfallen. Proc. R. S. Lond. **46.** p. 1. 1889.

Poincaré, Berechnung der Oscillationsdauer der Hertz'schen Schwingungen für verschieden gestaltete Inductoren. Par. C. R. **111.** p. 322. 1890.

Watson, Lodge, Discussion der von Hertz für seine Schwingungen aufgestellten Gleichungen. Nat. **39.** p. 486. 558. 583. 1889.

de la Rive, Theorie der Bildung stehender Wellen bei den Hertzschen Versuchen. Arch. de Genève (3) **23.** p. 391. 1890.

(Vgl. auch V, Lorberg und Thomson; VIIIb, Fitzgerald).

VII. Arbeiten über Dielektricitätsconstanten.

a) Allgemeines.

Cavendish, Electr. researches ed. by Maxwell. Cambr. 1879. p. 144. 432.

Faraday, Exp. res. 11. § 1189.

Rosetti, Nuov. Cim. (2) **10.** p. 171. 1873.

Belli, Corso element. di fisica sperim. 1838. **3.** p. 239. 294.

Harris, Phil. Trans. **132.** p. 165. 1842.

Mateucci, Par. C. R. **48.** p. 780. Ann. de chim. (3) **57.** p. 423. 1859. **27.** p. 133. 1849.

Werner Siemens Wippe u. Galv. Pogg. Ann. **102.** p. 91. 1857. **125.** p. 137. 1864.

Neyreneuff, Par. C. R. **85.** p. 547. **86.** p. 1542. 1877.

Schwedoff, Pogg. Ann. **137.** p. 559. 1869.

Gaugain, Ann. d. chim. (4) **2.** p. 276. 1864.

Bezold, Pogg. Ann. **143.** p. 62. 1871. Münch. Ak. 1870. 1877.

Wüllner, Münch. Ak. 1874. Wied. Ann. **1.** p. 247. 1877. **32.** p. 19. 1887.

b) Dielektricitätsconstante und Brechungsexponent bei isotropen festen und tropfbaren Körpern.

Gibson und Barklay, Paraffin aus Condensatorversuchen. Phil. Trans. **161.** p. 573. 1873.

Boltzmann, Romich, Nowak und Faydiga: Schwefel, Glas, Paraffin, Harz etc. aus Condensatorversuchen und aus der dielektrischen Fernwirkung (Anziehung dielektrisirter Kugeln durch freie Elektricität). Wien. Ber. **66.** p. 1. 256. 1872. **67.** p. 17. **68.** p. 155. 1873. **70.** p. 307. 367. 380. 1874. Pogg. Ann. **151.** p. 482. 1874. **155.** p. 403. 1875. Arch. d. Gen. **55.** p. 438. 1876.

Felici, Veränderung der Wirkung auf eine Drehwage durch dazwischengebrachte Würfel aus Schwefel, Wallrath etc. Nuov. Cim. **5.** p. 5. **6.** p. 73. 1871.

Gordon, Glas, Harze etc. aus Versuchen mit compensirten Condensatoren. Phil. Trans. 1879. p. 417. Nat. **20.** p. 485. 1879. **31.** p. 347. 1881.

Hopkinson, Aehnliches. Lond. Phil. Trans. 1881. II. p. 385. Proc. R. S. Lond. 1878. p. 17.
Ayrton und Perry, Dielektricität des Eises aus Condensatorversuchen. Phil. Mag. (5) **5.** p. 43. 1878.
Silow, Veränderung der Wirkung in einem Quadrantelektrometer bei Füllung mit dielektrischen Flüssigkeiten. Pogg. Ann. **156.** p. 389. 1875. **158.** p. 306. 1876.
Quincke, Messung der Anziehung von Condensatorplatten durch Wägung, Aenderung der Gestalt von Luftblasen etc. Berl. Ber. **5.** p. 4. 1883. Wied. Ann. **19.** p. 545. 705. 1883. **24.** p. 347. 606. 1885. **28.** p. 529. 1886. **32.** p. 529. 1887. **34.** p. 401. 1888.
Ayrton und Perry, Brechungsexponent des Ebonits. Phil. Mag. (5) **12.** p. 196. 1881.
Palaz, (Benzol, Toluol etc. auch Temperaturcoefficient). Dissertation Zürich 1886.
Fuchs, Aehnliches aus Condensatorversuchen. Wien. Ber. **98.** p. 1240. 1889.
Negreano, Benzin, Toluol etc. Paris. C. R. **104.** p. 423. 1887.
Salviani, (einige Oele). Roma, Acc. d. Lincei (3) **4.** p. 136. 1888.
Hopkinson, Benzol, Paraff. etc. Proc. R. S. Lond. **43.** p. 156. 1887.
Tereschinin, Alkohole, Formiate, Acetate etc. nach Silow-Cohn's Methode. Wied. Ann. **36.** p. 792. 1889.
Tomaszewski, Terpentinöl, Benzol nach Silow's Methode. Wied. Ann. **33.** p. 33. 1888.
Winkelmann, Glas, Ebonit, Paraffin mit dem Telephon. Wied. Ann. **38.** p. 161. 1889.
Donle, Glas, Paraffin, Aether Petroleum mit Bellati Giltay's Electro-Dynamometer. Wied. Ann. **40.** p. 307. 732. 1890.
J. J. Thomson, Dielektricitätsconstante aus Hertz's Schwingungen. Proc. R. S. Lond. **46.** p. 292. 1889. Vgl. Lecher, unter VIa. citirt.

c) Halbleiter, Absorption.

Colley, Diel. Polaris. von Electrolyten (ölsaures Blei etc.). Wied. Ann. **15.** p. 94. 1882.
Cohn und Arons sogar Alkohol und Wasser. Silow's Methode und andere. Wied. Ann. **33.** p. 13. 31. 1888. **38.** p. 42. 1889.
Gouy, Par. C. R. **106.** p. 930. 1888.
Dieterici, Paraffin und Schellack geben Rückstand. Wied. Ann. **25.** p. 545. 1885.
Arons, Polemik dagegen. Wied. Ann. **35.** p. 291. 1888.
Rowland und Nichols, Phil. Mag. (5) **11.** p. 414. 1881.

d) Krystalle.

Wiedemann, Pogg. Ann. **76.** p. 404. 1849.
Knoblauch, Pogg. Ann. **83.** p. 289. 1851.

de Senarmont, Ann. de chim. (3) **28.** p. 287. 1850.
Root, Pogg. Ann. **158.** p. 1. 425. 1876.
Curie, Dielektricität und Absorption von Krystallen. Par. C. R. **103.** p. 928. 1886. Lum. él. **28.** p. 580. **29.** p. 13. 127. 1888.
Klemencic, Glimmer als Dielektrikum. Wien. Ber. **96.** p. 807. 1887.
Bouty, Aehnliches. Par. C. R. **110.** p. 846. 1362. 1890.
Boltzmann, Romich, Nowack, Dielektrische Fernwirkung auf Krystalle. Wien. Ber. **70.** p. 342. 367.

e) Dielektricität der Gase.

Boltzmann, Wien. Ber. **69.** p. 797.
Ayrton und Perry, Asiat. soc. of Jap., 18. Apr. 1877.
Dielektricität des Sprengel'schen Vacuum. Ayrton, Lodge, Gordon, Perry. Rep. Brit. Ass. 1880. p. 197.
Klemencic, Dielektricitätsconst. einiger Gase mit Wippe und Galv. Wien. Ber. **91.** p. 714. 1885.

VIII Optik vom Standpunkte der Elektricitätslehre.

a) Erste Anfänge.

Oerstedt, Euler etc. Vgl. Christiansen, Die el. magn. Lichttheorie. Overs. d. k. dansk Vidensk. Selsk. Forhandl. 1889. p. 183.
Green, Grundz. der Naturlehre. Halle 1797. § 1408.
Faraday, Exp. res. 3075, Thoughts on ray vibr. Phil. Mag. 1846.
Weber und Kohlrausch, erste V-Bestimmung. El. dyn. Maassbestimmungen. Sächs. Ges. d. Wissensch. Leipzig 1856. (Die verschiedenen V-Bestimmungen, siehe Wiedemann, Elektricität IV. p. 994.

b) Allgemeine Optik.

A. Lorenz, Reflexion und Brechung des Lichtes. Arnheim Sande 1875. Beibl. 1877.
G. F. Fitzgerald, El. magn. Theorie d. Reflexion u. Brechung. Lond. R. S. Proc. **28.** p. 236. 1879. L. Phil. Trans. 1880. p. 691.
— Ueber die Möglichkeit, wellenartig el. Störungen hervorzurufen. Dubl. Trans. (2) **1.** p. 133. 173. 1880.
Rowland, El. magn. Theorie der Brechung (Huygens Princip). Phil. Mag. (5) **17.** p. 413. 1884. Am. Journ. of Math. **6.** p. 359. 1883.
C. A. H. Grinwis, Lichtabsorption nach Maxwell's Theorie. Amsterdam. Akad. **10.** p. 371. 1877. Arch. néerl. **12.** p. 177. 1877.
Gibbs, Notes on el. magn. theory of light. Sill. Journ. **23.** p. 262. 460. 1882/3.

Vergleich der elektr. u. elast. Lichttheorie bezüglich Farbenzerstreuung und Doppelbrechung. Sill. Journ. **35.** p. 467. 1888.

Vergleich mit Thomson's Wirbeltheorie des Lichtes. Sill. Journ. **37.** p. 129. 1889.

Glazebrook, Rep. on opt. theories. Rep. Brit. Ass. 1886. p. 153; Phil. Trans. 1879.

Rayleigh, El. mag. Th. des Lichts; Reflexion, Absorption, Polarisation. Phil. Mag. (5) **12.** p. 81. 1881.

F. T. Trouton, Erklärung der Phasenverschiebung bei der Reflexion aus der elektromagn. Lichttheorie. Phil. Mag. (5) **29.** p. 268. 1890.

Cohn, Die Durchsichtigkeit der Elektrolyten beginnt bei Schwingungsdauern die zwischen den Hertz'schen und denen des Lichtes liegen. Gött. Nachr. 1889. Wied. Ann. **38.** p. 217. 1889.

c) Doppelbrechung und Drehung der Polarisationsebene.

Kolaček, Wied. Ann. **34.** p. 673. 1888. **39.** p. 236. 1890.

Heaviside, Phil. Mag. (5) **19.** p. 397. 1885.

J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) **9.** p. 284. 1880. Cambr. phil. Soc. 5250. 1885. (Dreh. d. Pol.)

Schaik (Dreh. d. Pol.). Arch. néerl. t. **21.** p. 406. 1886. **18.** p. 70. 1882.

Zweiter Anhang.

Zusammenstellung der Bezeichnungen dieses Buches mit denen Helmholtz's (Borchardt's Journal **72.** p. 57. 1870), Stefan's (Wien. Sitzungsber. **70.** p. 589. Dec. 1874) und Hertz's (Göttinger Nachrichten 19. März 1890. Wied. Ann. **40.** p. 577. 1890.) (Schlüssel).

In den wenigen Fällen, wo sich die Bezeichnungen Maxwell's mit denen des vorliegenden Buches nicht genau decken, sind die ersteren (speciell die in dessen Treatise on Electr. angewandten) in eckiger Klammer beigefügt. Da namentlich die Helmholtz'sche Theorie vielfach von der Maxwell'schen abweicht, ist die Uebereinstimmung der zugeordneten Bezeichnungen oft keine vollständige. Wo dies besonders stark hervortritt, wurde ein Fragezeichen beigefügt. Zwei Fragezeichen bedeuten eine völlige Verschiedenheit beider Begriffe, die nur einer gewissen Analogie wegen in Parallele gesetzt wurden.

Dieses Buch	Helmholtz	Stefan	Hertz
$\mathfrak{V}\,[V]$	$1:A$	a	A
C	$1:\varkappa$	—	$A\lambda$
$k\,[K]$	$4\pi\varepsilon$	$4\pi h$	$A\varepsilon$
μ	$A^2(1+4\pi\vartheta)$	$(1+4\pi k):a^2$	$A\mu$
Null	k	Null	Null
$f,\ g,\ h$	$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z}$	$\alpha,\ \beta,\ \gamma$	$\frac{A\mathfrak{X}}{4\pi},\ \frac{A\mathfrak{Y}}{4\pi},\ \frac{A\mathfrak{Z}}{4\pi}$
$\frac{df}{dt},\ \frac{dg}{dt},\ \frac{dh}{dt}$	$u_0,\ v_0,\ w_0$	—	—
$p,\ q,\ r$	$u_2,\ v_2,\ w_2$	$u,\ v,\ w$	$u,\ v,\ w$
$u,\ v,\ w$	$u,\ v,\ w$	—	—
$a,\ b,\ c$	$\frac{\lambda}{\vartheta}A(1+4\pi\vartheta)$, $\frac{\mu}{\vartheta}A(1+4\pi\vartheta)$, $\frac{\nu}{\vartheta}A(1+4\pi\vartheta)$?	$\frac{\lambda(1+4\pi k)}{ak}$, $\frac{\mu(1+4\pi k)}{ak}$, $\frac{\nu(1+4\pi k)}{ak}$	$A\mathfrak{L},\ A\mathfrak{M},\ A\mathfrak{N}$
$4\pi\alpha,\ 4\pi\beta,\ 4\pi\gamma$ $[\alpha,\ \beta,\ \gamma]$	Componenten der magnetischen Kraft		$L,\ M,\ N$
$F:\mu,\ G:\mu,\ H:\mu$?	$U,\ V,\ W$	$X,\ Y,\ Z$	—
$P,\ Q,\ R$	—	—	$X,\ Y,\ Z$
$-X_1-\frac{k}{4\pi c}\frac{dX_2}{dt}$, $-Y_1-\frac{k}{4\pi c}\frac{dY_2}{dt}$, $-Z_1-\frac{k}{4\pi c}\frac{dZ_2}{dt}$,	—	—	$X',\ Y',\ Z'$
$X_1,\ Y_1,\ Z_1$; $X_2,\ Y_2,\ Z_2$	$\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}$; $X,\ Y,\ Z$??	—	—
$\varphi\,[V]$	χ	—	ψ
$\psi\,[\Psi]$	φ	U	φ

Besonders zu bemerken ist, dass man aus Helmholtz's Formeln die Maxwell'schen erhält, wenn man in ersteren ϑ und ε schon für Luft und daher auch für alle anderen Körper gross gegen die Einheit, k aber gleich Null setzt.

Helmholtz, H. v., Wissenschaftliche Abhandlungen.
2 Bände. gr. 8°. 1882—83. Mit Porträt in Stahlstich und 8 lith. Tafeln. ℳ 40.—

Seiner Zeit in selbständigen Broschüren, oder in verschiedenen Zeitschriften veröffentlicht, ist ein grosser Teil der hier wieder herausgegebenen Abhandlungen gar nicht mehr oder doch nur unter besonderen Schwierigkeiten zugänglich gewesen. — In Anbetracht ihrer Wichtigkeit konnte daher eine nochmalige Herausgabe in gleichmässiger moderner Ausstattung als Bedürfnis betrachtet werden und die günstige Aufnahme, welche dieselbe bei dem wissenschaftlichen Publikum fand, hat diese Annahme vollauf gerechtfertigt.

In dieser neuen Gesamtausgabe sind überall die Seitenzahlen des Originaldrucks am Rande angegeben, so dass Citate nach letzterem auch in der neuen Ausgabe nachgeschlagen werden können.

Jeder der beiden Bände wird allein abgegeben, dagegen können einzelne Abhandlungen oder Gruppen derselben nicht geliefert werden.

Erster Band.

VIII, 938 Seit. gr. 8° mit Porträt und 3 lithogr. Tafeln. ℳ 20.—

Inhalt:

Zur Lehre von der Energie: Bericht über die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen für 1845. — Über die Erhaltung der Kraft. 1847. — Erwiderung auf die Bemerkungen von Hrn. Clausius. 1854. — Über Eigenschaften des Eises. 1865. — **Hydrodynamik:** Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. 1858. — Sur le mouvement le plus général d'un fluide. 1868. — Sur le mouvement des fluides. — Réponse à la note de M. S. Bertrand. 1868. — Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. 1868. — Über ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken. 1873. — Über Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. 1860. — Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten. 1869. — **Schallbewegung:** Bericht über die theoretische Akustik betreffenden Arbeiten im Jahre 1848 und 1849. — Über Kombinationstöne. 1856. — Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. 1859. — Über den Einfluss der Reibung in der Luft auf die Schallbewegung. 1863. — Zur Theorie der Zungenpfeifen. 1861. — Über die Vokale. 1857. — Über die Klangfarbe der Vokale. 1859. — Über Klangfarben. 1860. — Über die Bewegung der Violinsaiten. 1860. — Über musikalische Temperatur. 1860. — Über die arabisch-persische Tonleiter. 1862. — **Elektrodynamik:** Über die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen induzierten Ströme. 1851. — Telephon und Klangfarbe. 1878. — Über einige Gesetze der Verteilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die tierisch-elektrischen Versuche. 1853. — Über eine allgemeine Transformationsmethode der Probleme über elektrische Verteilung. 1862. — Über die physiologische Wirkung kurzdauernder elektrischer Schläge im Innern von ausgedehnten leitenden Massen. 1869. — Über elektrische Oscillationen. 1869. — Über die Gesetze der inkonstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern. 1870. — Über die Theorie der Elektrodynamik. I. Abhandl.: Über die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhende leitende Körper. 1870. — Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektro-

dynamischen Wirkungen. 1871. — Über die Theorie der Elektrodynamik: Vorläufiger Bericht. 1872. — Über die Theorie der Elektrodynamik. II. Abhandl.: Kritisches. 1873. — Vergleich des Ampère'schen und Neumann'schen Gesetzes für die elektro-dynamischen Kräfte. 1873. — Über die Theorie der Elektrodynamik. III. Abhandl.: Die elektro-dynamischen Kräfte in bewegten Leitern. 1874. — Kritisches zur Elektrodynamik. 1874. — Versuche über die im ungeschlossenen Kreise durch Bewegung induzierten elektromotorischen Kräfte. 1875. — Bericht betreffend Versuche über die elektromagnetische Wirkung elektrischer Konvection, ausgeführt von Hrn. Henry A. Rowland. 1876. — Über die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisierter Körper wirkenden Kräfte. 1881. — **Galvanismus:** Ueber galvanische Polarisation in gasfreien Flüssigkeiten. 1873. — Bericht über Versuche des Hrn. Dr. Root aus Boston: Die Durchdringung des Platins mit elektrolyt. Gasen betr. 1876. — Über galvanische Ströme, verursacht durch Konzentrationsunterschiede; Folgerungen aus der mechanischen Wärmetheorie. 1877. — Studien über elektrische Grenzschichten. 1879. — Über Bewegungsströme am polarisierten Platina. 1880. — Eine elektro-dynamische Wage. 1881. — Über galvanische Polarisation des Quecksilbers. 1881.

Zweiter Band.

VI, 1021 Seit. gr. 8⁰ m. Holzschnitten u. 5 lith. Tafeln. ℳ 20.—

Inhalt:

Physikalische Optik: Über die Theorie der zusammengesetzten Farben. 1852. — Über Hrn. D. Brewster's neue Analyse des Sonnenlichtes. 1852. — Über die Zusammensetzung von Spektralfarben. 1855. — Über die Empfindlichkeit der menschlichen Netzhaut für die brechbarsten Strahlen des Sonnenlichtes. 1855. — Über die Messung der Wellenlänge des ultravioletten Lichtes, von E. Esselbach. 1855. — Mathematisch-physikalische Exkurse. 1867. — Über die Grenzen der Leistungsfähigkeit der Mikroskope. 1873. — Die theoretische Grenze für die Leistungsfähigkeit der Mikroskope. 1874. — Zur Theorie der anomalen Dispersion. 1874. — **Physiologische Optik:** Beschreibung eines Augenspiegels zur Untersuchung der Netzhaut im lebenden Auge. 1851. — Über eine neue einfachste Form des Augenspiegels. 1852. — Über eine bisher unbekannte Veränderung am menschlichen Auge bei veränderter Akkomodation. 1853. — Über die Akkomodation des Auges. 1856. — Über Farbenblindheit. 1859. — Über die Kontrasterscheinungen im Auge. 1860. — Über die Bewegungen des menschlichen Auges. 1863. — Über die normalen Bewegungen des menschlichen Auges. 1863. — Über die Form des Horopters, mathematisch bestimmt. 1862. — Über den Horopter. 1864. — Bemerkung über die Form des Horopters. 1864. — Über den Einfluss der Raddrehung der Augen auf die Projektion der Retinalbilder nach aussen. 1864. — Das Telestereoskop. 1857. — Über stereoskopisches Sehen. 1865. — Über die Bedeutung der Konvergenzstellung der Augen für die Beurteilung des Abstandes binocular gesehener Objekte. 1878. — **Physiologische Akustik:** Über die Mechanik der Gehörknöchelchen. 1867. — Die Mechanik der Gehörknöchelchen und des Trommelfelles. 1869. — Über die Schallschwingungen in der Schnecke des Ohres. 1869. — **Erkenntnistheorie:** Über die Natur der menschlichen Sinnesempfindungen. 1852. — Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. 1866. — Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. 1868. — Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze. 1878. — **Phy-**

siologie: De Fabrica Systematis nervosi Evertebratorum. 1842. — Wärme, physiologisch. 1845. — Über das Wesen der Fäulnis und Gärung. 1843. — Über den Stoffverbrauch bei der Muskelaktion. 1845. — Über die Wärmeentwickelung bei der Muskelaktion. 1847. — Messungen über den zeitlichen Verlauf der Zuckung animalischer Muskeln und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den Nerven. 1850. — Messungen über Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den Nerven. Zweite Reihe. 1852. — Über die Methoden, kleinste Zeitteile zu messen, und ihre Anwendung für physiologische Zwecke. 1850. — Über die Geschwindigkeit einiger Vorgänge in Muskeln und Nerven. 1855. — Die Resultate der neueren Forschungen über tierische Elektrizität. 1852. — Versuche über das Muskelgeräusch. 1864. — Über den Muskelton. 1866. — Mitteilungen, betreffend Versuche über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den motorischen Nerven des Menschen. 1867. — Neue Versuche über denselben Gegenstand. 1870. — Über die Zeit, welche nötig ist, damit ein Gesichtseindruck zum Bewusstsein kommt. 1871. — Über die Bewegungen des Brustkastens. 1856. — Die Wirkungen der Muskeln des Armes. 1856. — **Nachtrag neuester Abhandlungen:** Die Thermodynamik chemischer Vorgänge. 1882. — Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. 1882. — Über absolute Massysteme für elektrische und magnetische Grössen. 1882.

Kirchhoff, G., Gesammelte Abhandlungen. gr. 8. VIII, 641 Seiten mit 1 lith. Tafel, 1 Spektraltafel und Porträt in Stahlstich. 1882. *M* 15.—

Wie die Sammlung der v. Helmholtz'schen, so enthält auch vorstehende Ausgabe der Kirchhoff'schen Abhandlungen einen unveränderten Wiederabdruck der seit 1845 an verschiedenen Orten veröffentlichten Arbeiten. Dieselben sind nach verwandtem Inhalt geordnet und nachstehend verzeichnet:

Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige. 1845. — Nachtrag zu dem vorigen Aufsatze. 1846. — Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. 1847. — Über die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Teil aus nicht linearen Leitern bestehen. 1848. — Über eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst. 1849. — Über die stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche. 1875. — Über die Messung elektrischer Leitungsfähigkeiten. 1880. — Über die Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln. 1861. — Zur Theorie des Kondensators. 1877. — Bestimmung der Konstanten, von welcher die Intensität induzierter elektrischer Ströme abhängt. 1849. — Über die Bewegung der Elektrizität in Drähten. 1857. — Über die Bewegung der Elektrizität in Leitern. 1857. — Zur Theorie der Entladung einer Leydener Flasche. 1864. — Zur Theorie der Bewegung der Elektrizität in unterseeischen oder unterirdischen Telegraphendrähten. 1877. — Über den induzierten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen. 1853. — Zur Theorie des in einem Eisen-

körper induzierten Magnetismus. 1870. — Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. 1850. — Über die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe. 1850. — Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. 1858. — Über das Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation bei Stäben von federhartem Stahl. 1859. — Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt. 1879. — Über die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel. 1876. — Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. 1869. — Über die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können. 1869. — Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. 1869. — Über stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit. 1879. — Versuche über stehende Schwingungen des Wassers. 1880. — Über einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben. 1858. — Bemerkung über die Spannung des Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. 1858. — Über die Spannung des Dampfes von Mischungen aus Wasser und Schwefelsäure. 1858. — Über die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme. 1879. — Über den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung. 1868. — Über den Winkel der optischen Axen des Aragonits für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien. 1859. — Über die Fraunhofer'schen Linien. 1859. — Über den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme. 1859. — Über das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht. 1862. — Chemische Analyse durch Spektralbeobachtungen. 1860. — Zur Geschichte der Spektral-Analyse und der Analyse der Sonnenatmosphäre. 1862.

Als Ergänzung hierzu erschien 1891:

Nachtrag zu G. Kirchhoff's Gesammelten Abhandlungen. Herausgegeben von Prof. Dr. Ludwig Boltzmann. gr. 8. VII, 137 Seiten mit 1 lith. Tafel. ℳ 3,60.

Inhalt:

Ueber die Leitungsfähigkeit der Metalle für Wärme und Elektrizität von G. Kirchhoff und G. Hansemann. 1881. — Bemerkungen zu dem Aufsatze des Hrn. Voigt „zur Theorie des leuchtenden Punkts“. 1882. — Zur Theorie der Lichtstrahlen. 1882. — Über die elektrischen Strömungen in einem Kreiscylinder. 1883. — Über die Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand von G. Hansemann. 1884. — Zur Theorie der Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand. 1884. — Über die Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlektrisch polarisiert wird. 1884. — Über einige Anwendungen der Theorie der Formänderung, welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlektrisch polarisiert wird. 1884. — Zur Theorie der Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln. 1885.

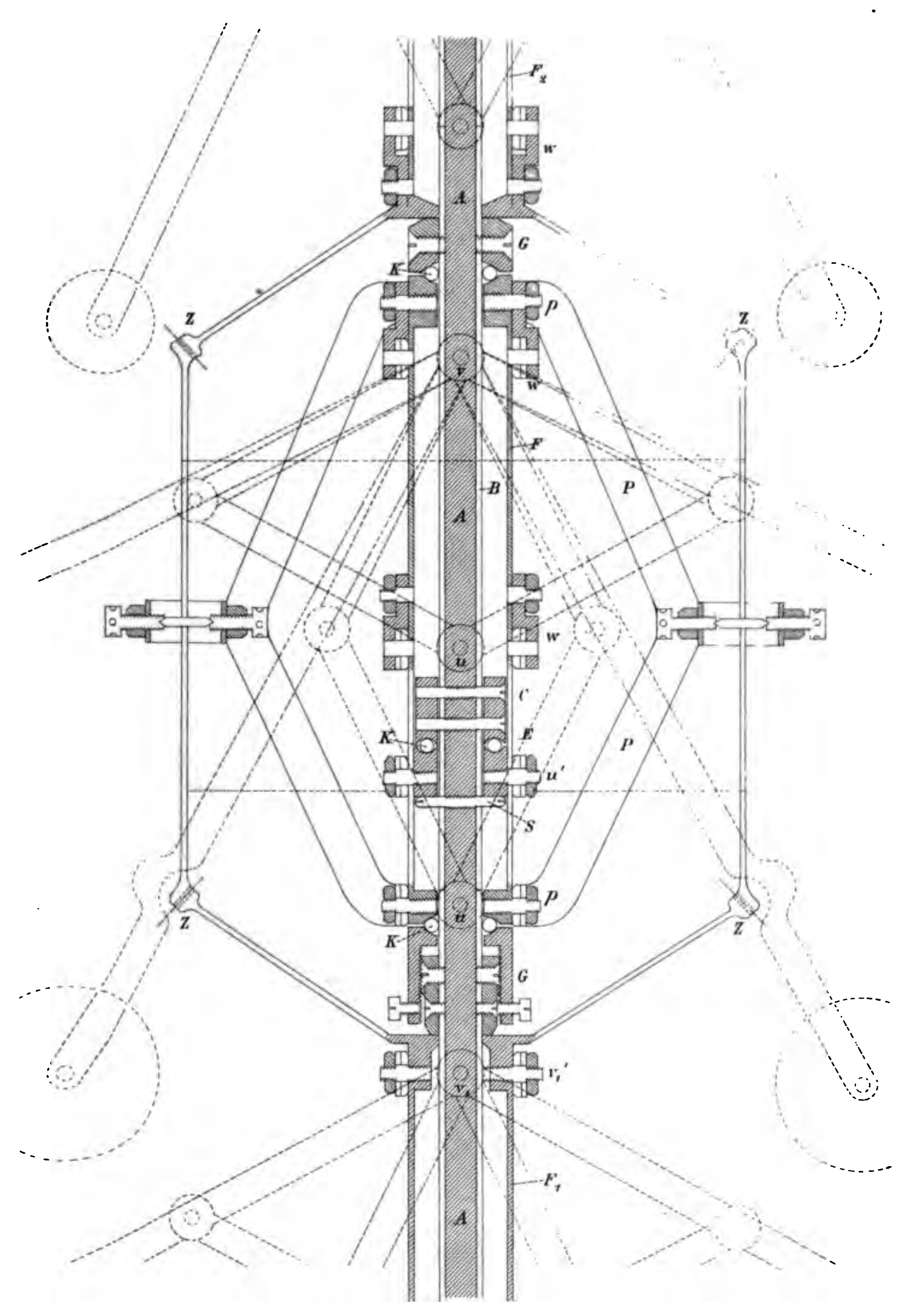


Fig. 14.

Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig

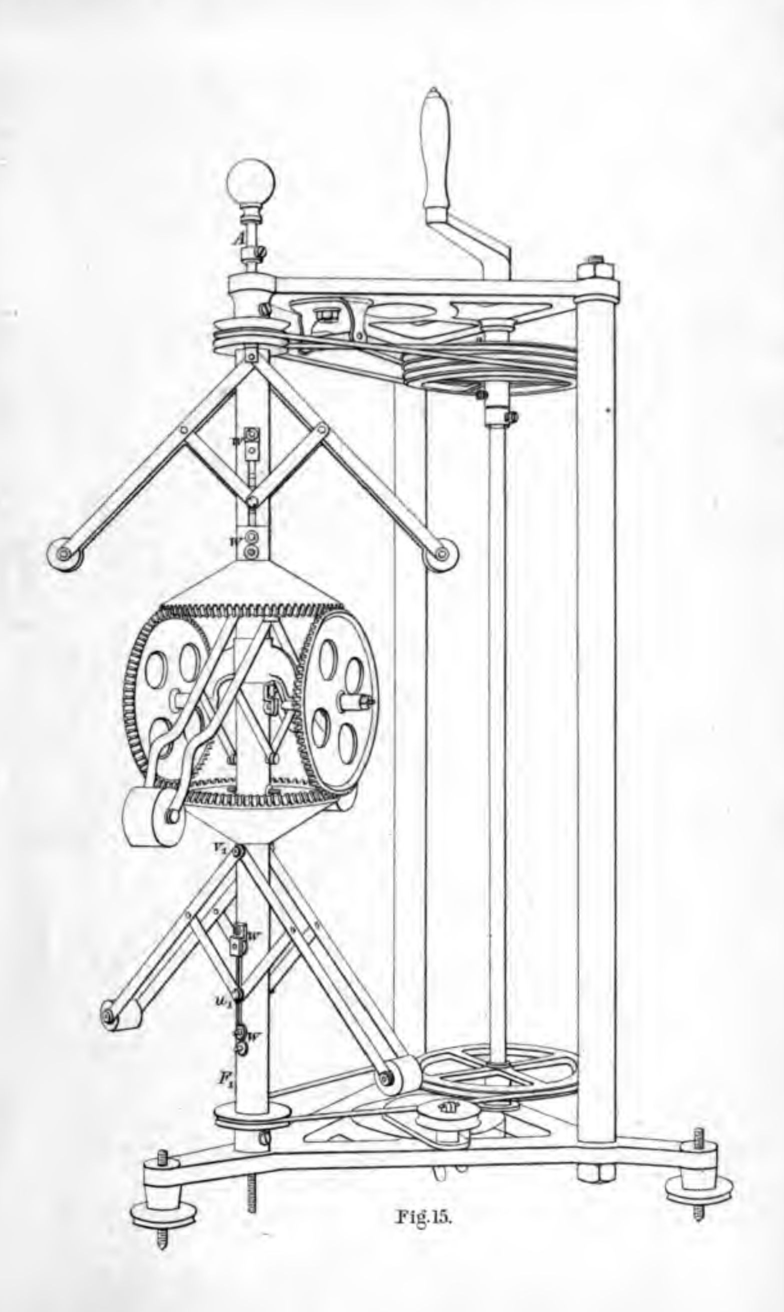


Fig. 15.

Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig

VORLESUNGEN

ÜBER

MAXWELLS THEORIE
DER ELEKTRICITÄT UND DES LICHTES

VON

DR. LUDWIG BOLTZMANN
PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

II. THEIL

VERHÄLTNISS ZUR FERNWIRKUNGSTHEORIE;
SPECIELLE FÄLLE DER ELEKTROSTATIK, STATIONÄREN
STRÖMUNG UND INDUCTION.

MIT FIGUREN IM TEXT UND ZWEI TABELLEN



LEIPZIG
JOHANN AMBOSIUS BARTH (ARTHUR MEINER)
1893

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

„War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb,
Die mit geheimnissvoll verborg'nem Trieb
Die Kräfte der Natur um mich enthüllen
Und mir das Herz mit stiller Freude füllen."

Von den zahlreichen, wohlwollenden Kritiken und aufmunternden Bemerkungen über den I. Theil dieser Vorlesungen war mir die werthvollste, weil kürzeste die eines lieben Freundes, welche einfach sagte: „Theuer finde ich das Buch". Ich habe desshalb hier im II. Theile all den Schmuck, mit welchem die Engländer solche Bücher zu zieren lieben (Marginalien, Figurentafeln etc.) weggelassen: dazu sind wir Deutsche zu arm. Nur das Motto habe ich noch beibehalten, das kostet ja nichts. Freilich habe ich es nicht nach englischer Sitte dem klassischen Alterthume entnommen, sondern einem deutschen Dichter (da sind wir wieder reich) und zwar abermals unserem Altmeister; warum wusste der auch alles so unübertrefflich zu sagen und zwar nicht nur, was ihm bekannt war, sondern auch das, wovon er selbst keine Ahnung hatte.

In der That, obiges Motto spricht meine Ansicht über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Magnetismus aus. Bezüglich des Inhaltes werde ich heute wohl kaum noch auf Widerspruch stossen. Aber die Form der Darstellung bei Maxwell finden viele noch dunkel und inconsequent; ich glaube hauptsächlich solche, welche dessen Theorie nur aus

dem Treatise kennen. Dort ist (vielleicht gerade durch das Bestreben, verständlich zu werden) vielfach die alte Theorie mit der neuen vermischt, und ich würde jedem empfehlen, sämmtliche Abhandlungen Maxwell's in der Reihenfolge, wie sie erschienen sind, zu lesen. Ich glaube kaum, dass er dann noch oft im Zweifel sein wird, was jedesmal unter Elektricität, dielektrischer Verschiebung etc. zu verstehen ist, oder gar glauben würde, dass Maxwell von der Annahme unvermittelter Fernkräfte ausgehend zu seinen Formeln gelangte.

Bei der Fülle des neuen, was Maxwell ausser seinen allgemeinen Gleichungen noch in so kurzer Zeit brachte (Lichttheorie, Anwendung der Lagrange-Hamilton'schen Methode auf theilweise unbekannte Bewegungen, Einführung von Coordinaten, von denen bloss die Ableitungen nach der Zeit im Ausdrucke für Energie vorkommen, mechanische Analogien aller Art etc.), können wir wohl eine so systematische Ausbildung jedes neuen Gedankens, wie sie die spätern Jahrzehnte brachten, in seinen ersten Abhandlungen nicht verlangen, ja freuen wir uns, dass Maxwell überhaupt noch einiges zu thun übrig liess. So betone ich nochmals, dass ich für meine Person durchaus nur als Interpret Maxwell's gelten will. Ich habe auch die Buchstaben Maxwell's wieder beibehalten; ich kann mir einfach die elektrischen Kräfte gar nicht anders als mit P, Q, R, die magnetischen nicht anders als mit α, β, γ etc. bezeichnet vorstellen. Aber nicht desshalb, sondern aus reinen Zweckmässigkeitsgründen wiederhole ich die Bitte, man möge hierin meinem Beispiele folgen. Da es der Mehrzahl der Leser bequemer zu sein scheint, habe ich hier im II. Theile ein bestimmtes Maasssystem eingeführt; daher erscheint $\mathfrak{V}$ in den Gleichungen explicit und die Constanten können nicht mehr genau unter die Form der allgemeinen Maxwell'schen Constanten K, L und μ gebracht werden.

Der hier vorliegende II. Theil hat hauptsächlich den Zweck, den alten Vorstellungen ihren Platz in der Maxwell'schen Theorie anzuweisen. Gerade so, wie in der Undulations-

theorie den Lichtstrahlen und andern Begriffen der Emanationstheorie, so kommt nämlich auch in der Maxwell'schen Theorie den alten Vorstellungen der Fernwirkungslehre eine bestimmte Bedeutung zu. Diese scharf abzugrenzen, dürfte gerade sehr viel zum richtigen Verständnisse beider beitragen.

Ausserdem war noch einiges bezüglich der Ableitung der Grundgleichungen nachzutragen.[1]) Mein Ideal, alle speciellen Beispiele so ausführlich wie in der alten Theorie zu behandeln und dadurch das Studium der alten Lehrbücher gewissermaassen überflüssig zu machen, habe ich, wie zu erwarten stand, freilich noch nicht erreicht; das bleibt also noch der Zukunft vorbehalten. Der I. Anhang enthält eine Ergänzung der Literaturübersicht durch die seither erschienenen, theilweise auch durch ältere vergessene Abhandlungen, der II. eine Zusammenstellung aller numerirten Formeln unter Beifügung der Seitenzahl behufs Erleichterung ihrer Auffindung.

Ich habe noch die Pflicht, meinem Assistenten, Herrn Ignaz Schütz, für die Dienste, die er mir bei der Correctur, Zusammenstellung der Literaturübersicht und noch sonst vielfach geleistet hat, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Zum Schluss kann ich nur mit den Worten Maxwell wünschen, es möge auch durch dies Werkchen mancher Leser im Studium der Elektricitätstheorie eher gefördert als gehindert werden!

München, im Juli 1893.

Ludwig Boltzmann.

---

[1]) Vgl. v. Helmholtz, Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik. Berl. Akad. 12. Mai 1892. Wied. Ann. **47**. p. 1. 1892.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Erste Vorlesung.

§ 1. Mechanische Grundlage 1
§ 2. Ableitung der Grundgleichungen 7

Zweite Vorlesung.

§ 3. Betrachtung der Gleichungen als bloss empirisch gegeben . 13
§ 4. Elektrostatisches Maasssystem 15
§ 5. Grenzbedingungen für die Trennungsfläche zweier Körper . 19

Dritte Vorlesung.

§ 6. Begriff der wahren und neutralen Elektricität. Bild behufs Veranschaulichung der Integrale obiger Gleichungen. Erster Zug des Bildes 22
§ 7. Zweiter Zug des Bildes 27

Vierte Vorlesung.

§ 8. Besonderer Charakter der nun zu suchenden Integrale . . . 32
§ 9. Anwendung des vorigen Paragraphen auf Aerodynamik und Elektricitätslehre (Asone, aphote Bewegung) 37

Fünfte Vorlesung.

§ 10. Begriff der freien Elektricität 42
§ 11. Dritter Zug des Bildes. Begriff der dielektrischen Polarisation 47

Sechste Vorlesung.

§ 12. Elektrostatik 53
§ 13. Annahme, dass $\mathfrak{d}$ klein gegen Eins ist. Bemerkung über dielektrische Fernwirkung 59

Siebente Vorlesung.

Seite
§ 14. Betrachtung mit der Zeit unveränderlicher äusserer elektromotorischer Kräfte 65
§ 15. Specialisirung des im vorigen Paragraphen betrachteten Falles 69

Achte Vorlesung.

§ 16. Beispiele für die Analogie der Elektrostatik und der Theorie der stationären Strömung 76
§ 17. Andeutungen über das Verhalten der Stellen, wo die äusseren elektromotorischen Kräfte ihren Sitz haben 85
§ 18. Wirkung äusserer elektromotorischer Kräfte in einem ringförmigen Leiter 89

Neunte Vorlesung.

§ 19. Magnetische Erscheinungen, im Falle, dass elektrische Erscheinungen entweder ganz fehlen, oder sich bloss auf elektrostatische beschränken 92
§. 20. Magnetische Erscheinungen bei Vorhandensein stationärer Strömungen, abgeleitet unter Annahme der Existenz von wahrem Magnetismus 99

Zehnte Vorlesung.

§ 21. Magnetische Kräfte eines Elementarstromes und eines Solenoides 103
§ 22. Magnetische Kräfte eines beliebigen Stromes aus denen eines Elementarstromes berechnet 106

Elfte Vorlesung.

§ 23. Magnetische Energie des Feldes. 110
§ 24. Ableitung der magnetischen Erscheinungen, ohne die Annahme der Existenz von wahren Magnetismen 113

Zwölfte Vorlesung.

§ 25. Fernwirkungsgleichungen 118
§ 26. Induction in einer geschlossenen Bahn 124

Dreizehnte Vorlesung.

§ 27. Veränderte Form der aus Maxwell's Theorie folgenden Fernwirkungsgleichungen. 128
§ 28. v. Helmholtz'sche Theorie. 133

Vierzehnte Vorlesung.

Seite

§ 29. Ueber die Wanderung wahrer Elektricität, welche sich ursprünglich im Innern von Leitern befand, nach deren Oberfläche und ein Theorem Gauss' 140

§ 30. Mechanismus des unendlichen geradlinigen elektrischen Stromes. Energieumsatz an den Stellen der Wirksamkeit äusserer elektromotorischer Kräfte 148

I. Anhang, Ergänzuug der Literaturübersicht 155

II. Anhang, Formelverzeichniss . . . . (Tafel)

Erste Vorlesung.

§ 1. Mechanische Grundlage.

Obwohl fast die Hälfte des ersten Theiles dieser Vorlesungen der Ableitung der Grundgleichungen Maxwell's für den Elektromagnetismus gewidmet war, so wollen wir doch zunächst, um das Verständniss des vorliegenden zweiten Theiles von dem des ersten vollkommen unabhängig zu machen, diese Gleichungen hier nochmals auf einem anderen Wege ableiten, der zwar in der Idee mit dem im ersten Theile eingeschlagenen eine gewisse Verwandtschaft hat, aber doch so weit davon abweicht, dass er mir ein selbständiges Interesse beanspruchen zu können scheint.

Wir gehen von der Hypothese aus, dass die elektrischen und magnetischen Wirkungen durch ein Medium vermittelt werden, welches den sogenannten leeren Raum, sowie alle ponderablen Körper durchdringt. Durch die Anwesenheit letzterer wird es jedoch in seinen Eigenschaften modificirt. Wir wollen dieses Medium Kürze halber den Aether nennen.

Jede Fernwirkung auf messbare Distanz schliessen wir aus. Die Veränderung des Zustandes irgend eines Volumelementes während irgend eines Zeitelementes soll lediglich bedingt sein durch die Zustände, welche zu Anfang dieses Zeitelementes in der unmittelbaren Umgebung dieses Volumelementes geherrscht haben. Da es leider noch nicht gelungen ist, die Art und Weise dieser Wirkung von Element zu Element vollkommen befriedigend mechanisch zu erklären, so müssen wir uns mit Vorstellungen von einer gewissen Allgemeinheit und Unbestimmtheit begnügen.

Wir nehmen an, dass in jedem Volumelemente eine Bewegung möglich ist, deren Natur uns unbekannt ist. Wir

setzen nur voraus, dass die durch diese Bewegung erzeugte Verschiebung in drei Componenten F, G, H nach den drei rechtwinkligen Coordinatenrichtungen zerlegt werden kann, genau so, wie die geradlinige Verschiebung eines materiellen Punktes oder wie die unendlich kleine Drehung eines starren Körpers. Wir können also die Verschiebung geometrisch darstellen durch eine in Länge und Richtung bestimmte Gerade (einen Vektor), welche auf die drei Coordinatenaxen die Projektionen F, G und H hat und daher einfach der Vektor (F, G, H) heissen soll.

Wir nennen nach Faraday diesen Vektor den elektrotonischen Zustand oder tonischen Zustand, oder noch kürzer Tonus des betreffenden Volumelementes und F, G, H dessen Componenten, ohne natürlich mit dieser Wortbildung irgend eine speciellere Vorstellung verknüpfen zu wollen.

Wir bezeichnen ferner die Geschwindigkeiten, mit welchen sich die drei Componenten des Vektors ändern (die tonischen Geschwindigkeitscomponenten) mit P, Q, R; setzen also:

1) $$P = \frac{dF}{dt}, \quad Q = \frac{dG}{dt}, \quad R = \frac{dH}{dt}.$$

Siehe Maxwell scient. pap. vol. I, pag. 476. Später, scient. pap. vol. I, pag. 555, treat. II, pag. 223, art. 599, schreibt dieser $P = -dF/dt$. Ich acceptire hier die erste Festsetzung, damit keine Zweifel über das Vorzeichen Platz greifen können, wo von Wachsthum oder Abnahme der tonischen Geschwindigkeitscomponenten, also von Beschleunigung oder Verzögerung der tonischen Bewegung die Rede sein wird.

Ferner bezeichnen wir mit $T d\tau$ die im Volumelemente $d\tau$ enthaltene lebendige Kraft dieser Bewegung (der tonischen Bewegung). Dann sei in einem isotropen Körper:

A*) $$T = \frac{K}{8\pi}(P^2 + Q^2 + R^2),$$

wobei die Grösse K im Innern verschiedener Körper verschiedene Werthe haben kann, aber durch die tonische Bewegung selbst nicht verändert werden soll.[1])

[1]) In einem anisotropen Körper soll sogar K für verschiedene Richtungen verschieden sein können, so dass man das Coordinatensystem immer so wählen kann, dass

$$T = (K_1 P^2 + K_2 Q^2 + K_3 R^2) / 8\pi$$

wird.

T nennen wir die tonische lebendige Kraft der Volumeinheit oder die Dichte der kinetischen Energie der tonischen Bewegung;

$$\frac{K}{4\pi}\frac{dF}{dt},\quad \frac{K}{4\pi}\frac{dG}{dt},\quad \frac{K}{4\pi}\frac{dH}{dt},$$

sind also die auf die Volumeinheit bezogenen Momente der tonischen Bewegung, welche Maxwell mit f, g, h bezeichnet. Derselbe setzt also:

$$2)\qquad f=\frac{K}{4\pi}\frac{dF}{dt},\quad g=\frac{K}{4\pi}\frac{dG}{dt},\quad h=\frac{K}{4\pi}\frac{dH}{dt}.$$

Ausserdem sollen der elektrotonischen Verschiebung gewisse Kräfte entgegenwirken, welche wir die tonischen Kräfte nennen, so dass die Herstellung desselben im Volumelemente $d\tau$ eine Arbeitsleistung $V d\tau$ bedingt. V wird dann als die Dichte der potentiellen tonischen Energie bezeichnet werden können.

Wären F, G, H die Verschiebungscomponenten eines Theilchens eines gewöhnlichen elastischen Körpers, so wäre V eine homogene Funktion zweiten Grades der Differentialquotienten dieser Grössen nach den Coordinaten. Dies soll auch für den Aether gelten; aber die Funktion zweiten Grades soll eine etwas andere Form haben als bei elastischen Körpern; es soll nämlich sein:

$$3)\qquad V=\frac{\nu}{2}(a^2+b^2+c^2),$$

wobei

$$4)\quad a=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz},\quad b=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx},\quad c=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}$$

ist. ν ist eine Constante des Körpers. Es sind also a, b, c die Componenten desjenigen Vektors, welchen die Engländer das Curl des Vektors (F, G, H), also des tonischen Vektors, nennen.

So einfach und naheliegend diese Annahme ist, so ist es doch nicht ganz leicht, sich eine bestimmte mechanische Vorstellung davon zu machen. Würden wir unter F, G, H einfach die Verschiebungen eines Aethertheilchens nach den drei Coordinatenrichtungen verstehen, so dass also der Tonus für den Aether dasselbe wäre, was die in der Elasticitätslehre betrachteten elastischen Verschiebungen für einen gewöhnlichen festen Körper sind, so wäre $K/4\pi$ einfach die Dichte des Aethers;

a, b, c aber wären die doppelten Drehungen eines Volumelementes desselben um drei den Coordinatenaxen parallele Axen und wir müssten zur Erklärung der Gleichungen 3 annehmen, dass sich jeder solcher Verdrehung eine dem Drehungswinkel proportionale Kraft entgegensetzt. Wir bekämen also Lord Kelvin's quasirigiden Aether.[1])

Allein dies würde verschiedene Unzukömmlichkeiten nach sich ziehen. Erstens müsste, wie sich aus dem spätern ergeben wird, an allen Stellen, wo sich wahre Elektricität befindet, Aether in die Welt ein- oder aus derselben ausströmen, zweitens würde, sobald

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}$$

von Null verschieden ist, K durch die tonische Bewegung verändert werden. Würde man aber K als unveränderlich betrachten, so wäre wieder die Entwicklung freier Elektricität nur schwierig zu erklären. (Etwa dadurch, dass die Anwesenheit der Körpermoleküle unter gewissen Umständen die Constanz von K aufhöbe.) Man müsste dann auch, wenn der Aether incompressibel, daher dessen Dichte $K/4\pi$ an allen Stellen unveränderlich vorausgesetzt würde, zum Hamilton'schen Principe noch die Bedingung $\delta(dx\,dy\,dz) = 0$ hinzufügen, was dann Glieder liefern würde, die dem Drucke in incompressiblen Flüssigkeiten entsprächen und die die Maxwell'sche Theorie nicht kennt.

Derartige Glieder finden sich freilich in der v. Helmholtz'schen Theorie der Elektrodynamik. Allein es ist mir da noch nicht gelungen, die mechanische Bedeutung der v. Helmholtz'schen Gleichungen[2]) für alle Werthe der darin vorkommenden Constanten klarzustellen.

Nicht etwa, als ob ich prätendiren würde, hiermit die wahre Natur der tonischen Bewegung getroffen zu haben, will ich doch, um der Einbildungskraft gewisse Anhaltspunkte zu geben, einige flüchtige Andeutungen einschalten, welche auf eine Bewegungsart hinweisen, die ganz den Charakter der elektrotonischen besitzt.

Sei in jedem Volumelemente ein Kern enthalten, F, G, H

[1]) Vgl. Thomson, math. and phys. pap. III, p. 442.

[2]) Wissenschaftliche Abhandlungen. Band I, S. 621.

seien die gesammten Drehungswinkel, um welche dieser Kern zu irgend einer Zeit t um drei den Coordinatenrichtungen parallele Axen gedreht worden ist. Dann müsste unter $K\,d\tau\,/\,4\pi$ das Trägheitsmoment dieses Kerns bezüglich einer durch sein Centrum gehenden Axe, unter P, Q, R die Componenten der Winkelgeschwindigkeit seiner augenblicklichen Drehung verstanden werden, so dass

$$\frac{K\,d\tau}{8\pi}(P^2 + Q^2 + R^2)$$

seine lebendige Kraft wäre, und es wäre für anisotrope Körper auch eine Verschiedenheit des Trägheitsmoments bezüglich verschiedener Axen vorstellbar.

Grössere Schwierigkeiten bereitet die Deutung des Ausdrucks 3. Da müssen wir, zu einer alten Maxwell'schen Idee zurückgreifend, annehmen, dass zwischen je zwei rotirenden Kernen Partikelchen eingestreut sind, die wie Friktionsrollen in die Drehung beider eingreifen. Die durchschnittliche Verschiebung aller dieser Partikelchen in der x-Richtung ist dann a proportional, und man muss annehmen, dass durch sie eine der Grösse dieser durchschnittlichen Verschiebung proportionale Kraft geweckt wird, sodass die durch die Verschiebung dieser Partikelchen geleistete Arbeit proportional a^2, resp. b^2 oder c^2 ist. Wie gezwungen auch die Vorstellung solcher Friktionsrollen sein mag, so zeigt sie doch, dass eine Bewegung mechanisch denkbar ist, welcher alle Eigenschaften zukommen, die wir der tonischen Bewegung zugeschrieben haben. Jede derartige zur Versinnlichung des Tonus aufgestellte Hypothese wollen wir als mechanische Analogie bezeichnen.

Ich bemerke noch, dass die Drehungswinkel F, G, H aus zwei Summanden bestehen können, F_1, G_1, H_1 und F_2, G_2, H_2, von denen die ersteren die Bedingungen

$$\frac{dH_1}{dy} = \frac{dG_1}{dz}, \quad \frac{dF_1}{dz} = \frac{dH_1}{dx}, \quad \frac{dG_1}{dx} = \frac{dF_1}{dy}$$

erfüllen und beliebig gross werden können; die letzteren Summanden aber, welche diese Bedingungen nicht erfüllen, müssen sehr klein bleiben, da sonst V, wenn es schon für kleine a, b, c endlich ist, enorm wachsen würde.

Es hat die zuletzt vorgetragene Anschauung eine gewisse

Aehnlichkeit mit einer alten Theorie Hankel's[1]) und einer Hypothese Sommerfeld's[2]); doch nimmt letzterer keine Friktionsmoleküle an und verfällt so wieder in neue Schwierigkeiten.[3]) Die hier vorgetragene Anschauung ist in ähnlicher Weise eine Umkehrung der ersten Maxwell'schen Theorie, wie die Sommerfeld'sche eine Umkehrung der Thomson'schen Theorie des quasirigiden Aethers ist.

Es ist möglich, dass ganz andere Bewegungen, z. B. schwingende oder unregelmässig zickzackförmige, wie bei Gasmolekülen im Mittel wieder auf dieselben Gleichungen führen würden. Da aber ihre Behandlung viel verwickelter wäre und doch kein bestimmter Anhaltspunkt für irgend eine specielle Wahl vorliegt, so will ich hierauf nicht weiter eingehen, beschränke mich vielmehr auf die Verfolgung der weiteren Consequenzen der oben angegebenen allgemeinen Eigenschaften des Tonus.

Wenn wir eine bestimmte mechanische Analogie zu Grunde legen, so können wir alle Grössen in den ihnen gemäss dieser Analogie natürlich zukommenden mechanischen Maassen (den natürlichen Maassen) gemessen denken. Dies wollen wir in dieser Vorlesung immer thun und es dadurch zum Ausdruck bringen, dass wir in den Schlussgleichungen denjenigen Grössen, für welche wir später andere Maasse benutzen werden, den Index n beifügen. So schreiben wir die Gleichung A* lieber in der Form:

$$\text{A n)} \qquad T = \frac{K}{8\pi}(P_n^2 + Q_n^2 + R_n^2),$$

lediglich um anzudeuten, dass hier P, Q, R in ihren natürlichen Maassen gemessen zu denken sind. Auch in allen anderen Gleichungen dieser Vorlesung denken wir uns dasselbe Maass angewendet, wenn wir auch den Index Kürze halber nicht immer beifügen.

Ferner empfiehlt es sich, statt ν die Grösse

$$\frac{1}{4\pi\nu} = \mu$$

---

1) Hankel, Pogg. Ann. 126, S. 440, 1865; 131, S. 607, 1867; vergl. auch Helm, Wied. Ann. 47, S. 743, 1892.

2) Sommerfeld, Wied. Ann. Bd. 46, S. 139, 1892; Reiff, Elasticität und Elektricität, Freiburg, akad. Verlag, 1893.

3) Wied. Ann. Bd. 48, S. 95, 1893.

und statt a, b, c die Grössen:

$$\alpha = 4\pi\nu a = \frac{a}{\mu}, \quad \beta = 4\pi\nu b = \frac{b}{\mu}, \quad \gamma = 4\pi\nu c = \frac{c}{\mu}$$

einzuführen, so dass wir statt der Gleichungen 3 und 4 erhalten:

Bn) $$V = \frac{\mu}{8\pi}(\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \gamma_n^2),$$

5n) $$\mu\alpha_n = \frac{dH_n}{dy} - \frac{dG_n}{dz}, \; \mu\beta_n = \frac{dF_n}{dz} - \frac{dH_n}{dx}, \; \mu\gamma_n = \frac{dG_n}{dx} - \frac{dF_n}{dy}.$$

§. 2. Ableitung der Grundgleichungen.

Da wir lebendige Kraft und Arbeit kennen, so können wir die Kräfte, welche F, G, H zu beschleunigen, resp. P, Q, R zu vermehren streben, nach dem Hamilton'schen Principe finden, indem wir setzen:

6) $$4\pi \iint dt\,d\tau\,(\delta T - \delta V) = 0.$$

Substituiren wir in Gleichung 6 für T und V ihre Werthe und setzen $d\tau = dx\,dy\,dz$, so folgt:

$$\iiiint dt\,dx\,dy\,dz \left[K\left(P\frac{d\delta F}{dt} + Q\frac{d\delta G}{dt} + R\frac{d\delta H}{dt}\right) - \right.$$
$$\left. -\alpha\left(\frac{d\delta H}{dy} - \frac{d\delta G}{dz}\right) - \beta\left(\frac{d\delta F}{dz} - \frac{d\delta H}{dx}\right) - \gamma\left(\frac{d\delta G}{dx} - \frac{d\delta F}{dy}\right)\right] = 0.$$

Wir haben hier diejenigen Glieder, welche nach der Zeit differenzirte Variationen enthalten, partiell nach dieser, jene aber, welche nach den Coordinaten differenzirte Variationen enthalten, partiell nach jenen zu differenziren. Die Grenzen für die Zeit, sowie die Werthe der Variablen im Anfangs- und Endzustande sind in der Hamilton'schen Gleichung allemal als constant zu betrachten, daher verschwinden bei partieller Integration nach der Zeit die von diesen Grenzwerthen herrührenden Glieder. Bei partieller Integration nach den Coordinaten aber müssen wir die Grenzbedingungen berücksichtigen, welche für die Oberfläche der Körper gelten. Da wir auch den sogenannten leeren Raum mit Aether erfüllt denken, so werden diese Oberflächen immer als Trennungsflächen zweier verschiedener Medien, resp. als Trennungsflächen zweier Aethermassen von verschiedener Beschaffenheit zu denken sein. Wir haben keine bestimmte mechanische Vorstellung zu Grunde

gelegt, daher wird auch das Problem der Auffindung dieser Grenzbedingungen kein eindeutig bestimmtes sein, wenn wir die Grenzflächen als mathematische Flächen denken, in denen zwei vollkommen verschiedene Medien aneinanderstossen. Die Aufstellung dieser Grenzbedingungen würde dann neue Annahmen erfordern, in denen wieder manches Willkürliche nicht zu vermeiden wäre.

Wir wollen da die einfachste Annahme machen, von welcher schon Maxwell ausging, und welche von v. Helmholtz und Hertz weiter ausgebildet wurde. [1])

Wir können uns jedenfalls zwei ganz verschiedene Körper denken, welche durch eine sehr dünne Schicht getrennt sind, in der die Eigenschaften des einen sehr rasch aber doch continuirlich in die des anderen übergehen. Bei mischbaren Stoffen, wie reinem Wasser und einer wässerigen Lösung, oder Zink und Quecksilber, oder Kupfer und geschmolzenem Zink wäre dies entschieden realisirbar und würde sich auch dauernd erhalten, wenn beide Körper, ehe die Mischung weiter vorgeschritten wäre, in den festen Zustand übergingen. Vielleicht können zwischen zwei beliebigen Körpern solche continuirliche Uebergangsschichten hergestellt werden, vielleicht ändern sich wenigstens die Eigenschaften des Aethers, auf den allein sich unsere Gleichungen beziehen, continuirlich. Jedenfalls wollen wir voraussetzen, dass, wenn es selbst mathematische Discontinuitätsstellen gibt, die Grenzbedingungen, welche für dieselben gelten, keine anderen sind, als diejenigen, welche man bei Voraussetzung einer continuirlichen, aber sehr dünnen Uebergangsschicht finden würde, in welcher die Gültigkeit unserer Gleichungen nirgends gestört wird.

Diese Annahme ist von den verschiedenen willkürlichen Voraussetzungen, welche man über solche Grenzschichten vielleicht noch machen könnte, jedenfalls weitaus die wahrscheinlichste und natürlichste. Wir erreichen durch sie einen grossen mathematischen Vortheil. Würden wir irgend welche andere Grenzbedingungen voraussetzen, so müssten wir bei der partiellen Integration nach den Coordinaten die auf die Trennungsflächen bezüglichen Glieder einer besonderen Betrachtung unterziehen. Haben wir dagegen an den Trennungsflächen überall

[1]) Vgl. auch Poincaré, Electricité et optique Vol. 2, S. XI.

continuirliche Uebergänge, so sind im Innern nirgends Unterbrechungen der Continuität vorhanden. Wir haben also nur die unendlich entfernte Grenze des gesammten Raumes zu betrachten, bis zu der sich der Einfluss der hervorgerufenen elektrischen und magnetischen Störungen sicher nicht erstreckt, so dass also alle auf die Grenzen bezüglichen Glieder verschwinden.

Dasselbe gilt natürlich auch dann noch, wenn die Trennungsflächen wirkliche Unstetigkeitsflächen sind, sobald nur die Grenzbedingungen genau so gebildet sind, wie sie sich aus der Hypothese sehr rascher aber continuirlicher Uebergänge ergeben.

Wir wollen diese Ableitungsweise der Grenzbedingungen, um einen bestimmten Namen zu haben, das Princip der Continuität der Uebergänge nennen, und unter diesen Namen auch noch die Hypothese mit einbegreifen, dass mit Abnahme der Dicke der Uebergangsschicht weder die Constanten des Materiales (K, μ etc.), noch auch (wenigstens wenn keine unendlichen elektromotorischen Kräfte in der Uebergangsschicht vorhanden sind) die Dichte der kinetischen oder der potentiellen tonischen Energie ins Unendliche wachsen kann, da ja eine unendliche Energiedichte unendliche Kräfte im betreffenden Punkte voraussetzen würde. Das Material soll an jeder Stelle der Uebergangsschicht eine bestimmte, durch endliche K, C, μ charakterisirte Beschaffenheit haben.

Nach den Gleichungen An und Bn folgt, dass auch P, Q, R, a, b, c nicht mit abnehmender Dicke der Trennungsschicht ins Unendliche wachsen können; wohl aber werden dies die Differentialquotienten aller dieser Grössen normal zur Schicht.

Da unter diesen Voraussetzungen alle anf die Integrationsgrenzen bezüglichen Glieder verschwinden, so liefert die Ausführung aller partiellen Integrationen das folgende Resultat:

$$\iiiint dt\,dx\,dy\,dz \Big\{ \delta F\Big[K\frac{dP}{dt} - \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy}\Big]$$

$$+ \delta G\Big[K\frac{dQ}{dt} - \frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz}\Big]$$

$$+ \delta H\Big[K\frac{dR}{dt} - \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\Big]\Big\} = 0.$$

Die Nullsetzung der Coëfficienten von δF, δG, dH aber liefert:

$$7)\quad \begin{cases} \frac{K}{4\pi}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}\right), \quad \frac{K}{4\pi}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz}\right), \\ \frac{K}{4\pi}\frac{dR}{dt} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}\right). \end{cases}$$

Wir setzen voraus, dass die ponderablen Körper selbst ruhen und daher K und μ sich nicht mit der Zeit ändern; wohl aber können diese Grössen von Punkt zu Punkt verschieden, also Funktionen von x, y und z sein. Dieselben Gleichungen gelten übrigens auch für die Relativbewegung der elektromagnetischen Zustände gegen die ponderablen Körper, falls letztere den Aether, ohne die Bewegung in demselben zu stören, mit sich nehmen.

$K d\tau / 4\pi$ spielt die Rolle der Masse, dP/dt die der Beschleunigung, daher stellt die rechte Seite der Gleichungen 7 die durch $d\tau$ dividirten Kraftcomponenten dar, welche wir die auf die Volumeinheit wirkenden Componenten der tonischen Kraft nennen können. Ausser dieser soll der tonischen Bewegung noch eine Kraft entgegenwirken, welche wir kurz die Widerstandskraft nennen. Sie soll der tonischen Geschwindigkeit direkt entgegengerichtet und proportional sein. Ihre Componenten in den Coordinatenrichtungen sollen daher sein $-CPd\tau$, $-CQd\tau$, $-CRd\tau$, wobei C eine Constante ist, deren Werth an verschiedenen Stellen des Raumes verschieden sein kann. Diese Widerstandskraft ist vollkommen analog der Reibung; durch sie muss also fortwährend Energie in Wärme verwandelt werden, und zwar ist der Quotient, den man erhält, wenn man die in der Zeit dt und im Volumelemente $d\tau$ in Wärme verwandelte Energie durch $dt\,d\tau$ dividirt:

$$8n)\quad W = C(P_n dF_n + Q_n dG_n + R_n dH_n)/dt = C(P_n^2 + Q_n^2 + R_n^2)$$

(Joule'sche Wärme). Dagegen soll durch die elektrotonischen Kräfte, da diese ein Potential haben, keine Energie in Wärme verwandelt werden. Die durch Magnetisirung oder Dielektrisirung infolge Hysteresis entwickelte Wärme vernachlässigen wir also.

Endlich sollen an Stellen, wo gerade hydroelektromotorische, thermoelektromotorische oder reibungselektromotorische Kräfte wirken, zu den Componenten der tonischen Kräfte noch

je ein ganz unbekanntes, aber von F, G, H unabhängiges Glied hinzukommen, welches wir mit $-CX d\tau$, resp. $-CY d\tau$, $-CZ d\tau$ bezeichnen wollen. Die letzteren drei Grössen nennen wir die im Volumelemente $d\tau$ wirksamen äusseren elektromotorischen Kräfte. Sie repräsentiren im Allgemeinen eine Energiequelle (chemische oder Wärmeenergie). Der hieraus im Volumelemente $d\tau$ während der Zeit dt geschöpfte Energiebetrag dividirt durch $dt\,d\tau$ ist:

$$\text{9n)} \quad \begin{cases} \Gamma = -C(X_n dF_n + Y_n dG_n + Z_n dH_n)/dt \\ \quad = -C(X_n P_n + Y_n Q_n + Z_n R_n). \end{cases}$$

Fügt man die zuletzt aufgezählten Kräfte den Gleichungen 7 bei, so erhält man folgende vervollständigte Gleichungen:

$$\text{Cn)} \quad \begin{cases} K\dfrac{dP_n}{dt} = \dfrac{d\beta_n}{dz} - \dfrac{d\gamma_n}{dy} - 4\pi C(P_n + X_n) \\ K\dfrac{dQ_n}{dt} = \dfrac{d\gamma_n}{dx} - \dfrac{d\alpha_n}{dz} - 4\pi C(Q_n + Y_n) \\ K\dfrac{dR_n}{dt} = \dfrac{d\alpha_n}{dy} - \dfrac{d\beta_n}{dx} - 4\pi C(R_n + Z_n). \end{cases}$$

Die Giltigkeit der Gleichung 8n an Stellen, wo $X = Y = Z = 0$ ist, unterliegt keinem Zweifel. Dagegen ist das Verhalten der Stellen, wo äussere elektromotorische Kräfte wirken, weder experimentell genügend untersucht, noch theoretisch klargestellt. Wenn X, Y, Z sich mechanisch verhalten würden, wie Kräfte zwischen ruhenden Körpern, so müssten die beiden Gleichungen 8n und 9n ohne weitere Correction richtig sein. Meist aber scheinen im Gegentheile Bewegungen die Veranlassung zum Auftreten der äusseren elektromotorischen Kräfte zu geben. So in den Hydroketten die Trennung und Wiedervereinigung der chemischen Elemente, in den Diffusions- und Diaphragmenströmen nachweisbare Molarbewegungen, in den Thermoströmen Wärmebewegungen. Dann kann noch ausser der durch die Gleichungen 8n und 9n bestimmten eine beliebige Energiemenge $\Lambda\, d\tau \,.\, dt$ aus der den Strom treibenden Energiequelle aufgenommen und an der Stelle, wo die elektromotorischen Kräfte thätig sind, direkt in Wärme verwandelt werden, so dass man für die aufgenommene Energie an Stelle der Gleichung 9n den Werth:

En) $\Gamma = \varLambda - C(X_n P_n + Y_n Q_n + Z_n R_n)$,

für die auftretende Wärme aber an Stelle der Gleichung 8n den Werth:

Fn) $W = \varLambda + C(P_n^2 + Q_n^2 + R_n^2)$

erhält. Ich werde hierauf am Schluss des Buches (Gleichung 102 § 30) noch einmal zurückkommen und bemerke hier nur, dass sämmtliche hierher gehörigen Erscheinungen (Peltier-Effekt, Thomson-Effekt in Thermoketten, Abweichungen vom Thomson'schen Gesetz bei Hydroketten) noch kaum endgiltig in die Theorie eingefügt werden können. Wo $X = Y = Z = 0$ ist, also keine stromtreibende Energiequelle sich findet, kann ihr auch keine direkt in Wärme umzusetzende Energie entnommen werden. Dort ist also $\varLambda = 0$ und wird daher die Gleichung 8n auch erfahrungsmässig bestätigt.

Um durchwegs dieselben Variablen zu haben, empfiehlt es sich, auch in den Gleichungen 4 resp. 5n anstatt F, G, H die Grössen P, Q, R einzuführen, indem man jede dieser Gleichungen nach t differenzirt; dies liefert:

Dn) $$\left\{\begin{array}{c} \mu \frac{d\alpha_n}{dt} = \frac{dR_n}{dy} - \frac{dQ_n}{dz}, \quad \mu \frac{d\beta_n}{dt} = \frac{dP_n}{dz} - \frac{dR_n}{dx}, \\ \mu \frac{d\gamma_n}{dt} = \frac{dQ_n}{dx} - \frac{dP_n}{dy}. \end{array}\right.$$

Wir hätten die Gleichungen Cn auch direkt aus dem Hamilton'schen Principe finden können, wenn wir in Gleichung 6 unter $\delta V . d\tau$ die Gesammtarbeit verstanden hätten, welche alle in $d\tau$ wirksamen Kräfte bei Veränderung von F, G, H um δF, δG und δH leisten. Statt $\delta V d\tau$ wäre dann in Gleichung 6 zu setzen gewesen die Summe folgender Arbeiten: 1. der Arbeit der elektrotonischen Kräfte:

$$d\tau\,\delta\left(\mu \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi}\right),$$

2. der Arbeit der Widerstandskräfte:

$$d\tau\, C(P\delta F + Q\delta G + R\delta H),$$

endlich 3. der Arbeit der äusseren elektromotorischen Kräfte:

$$d\tau\, C(X\delta F + Y\delta G + Z d H),$$

so dass die Gleichung 6 gelautet hätte:

$$\int\int d\tau\, dt \{K(P\delta P + Q\delta Q + R\delta R) - \mu(\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma) - 4\pi C[(P + X)\delta F + (Q + Y)\delta G + (R + Z)\delta H]\} = 0.$$

Durch genau dieselbe Methode der partiellen Integration, welche wir früher auf das unvollständige Integrale angewendet haben, hätten wir aus diesem Integral direkt die Formeln Cn erhalten können.

Die vier Gleichungen A, B, C und D sind die einzigen, welche wir später verwenden werden. Wir haben sie deshalb mit lateinischen Buchstaben bezeichnet und werden sie kurz die Maxwell'schen Fundamentalgleichungen nennen. Dazu kommen noch die Gleichungen E und F, welche die entwickelte Wärme und die von den äusseren elektromotorischen Kräften geleistete Arbeit bestimmen. Gleichungen, welche die Peltier-Wärme, die hydro- und thermoelektromotorischen Kräfte und vieles ähnliche genauer definiren, wollen wir als specielle Fälle vorläufig nicht weiter in Betracht ziehen.

Zweite Vorlesung.

§ 3. Betrachtung der Gleichungen als bloss empirisch gegeben.

Legt man auf die gegebene mechanische Ableitung dieser Gleichungen kein Gewicht, so kann man sich auch noch der Hertz'schen Methode bedienen. Man schreibt diese sechs Gleichungen einfach hin und bemerkt, dass ihre beste Begründung darin besteht, dass daraus sämmtliche Phänomene in richtiger Weise folgen. Man hat sich dann jedenfalls von jeder Hypothese freigehalten. Freilich muss dann eine bestimmte Definition der Grössen P, Q, R vorausgeschickt werden.

Wir betrachteten dieselben als Geschwindigkeitscomponenten einer zwar unbekannten, aber doch wirklich existirenden Bewegung. Hertz dagegen definirt sie als die Kräfte, welche auf die Elektricitätsmenge Eins wirken würden, wenn diese an die betreffende Stelle in das Feld gebracht würde. Eine solche Definition hat in der Fernwirkungstheorie nichts Bedenkliches, da man ja nach dieser in jedem Punkte Elektricitätsmengen hineinbringen und wegnehmen kann, ohne Position und Geschwindigkeit der übrigen zu ändern. Nach der

Maxwell'schen Theorie kann dies jedoch nicht ohne Aenderung der ganzen Umgebung geschehen.

Schon in dem einfachen Falle, dass man die Hertz'sche Definition anwenden will, um P im Innern eines durchströmten Leiters aufzusuchen, hören, sobald man das hierzu erforderliche Loch gebohrt hat, im Innern des Loches alle elektromotorischen Kräfte auf. Bohrt man aber so schnell und bringt die Elektricitätsmenge Eins so schnell hinein, dass dadurch der Zustand der Umgebung nicht geändert wird, so ist wieder Gefahr vorhanden, dass sich auch die elektrische Wirkung noch gar nicht im Innenraum des Loches bis zur Elektricitätsmenge Eins fortgepflanzt hat und so die Hertz'sche Definition von P, Q, R illusorisch wird.

Ausserdem muss noch bewiesen werden, dass in dieser Definition kein Widerspruch mit dem aufgestellten Ausdrucke für die Energie liegt, da ja nachher aus diesem nochmal bewiesen werden kann, dass auf die Elektricitätsmenge Eins die Kräfte P, Q, R wirken, was schon ursprünglich als Definition angenommen wurde.

Noch eins sei bemerkt. Die Elektricitätsmenge Eins wird später selbst wieder durch P, Q, R definirt, indem

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}\right)$$

die Definition der Dichte der freien, und

15n $$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d(KP)}{dx}+\frac{d(KQ)}{dy}+\frac{d(KR)}{dz}\right]$$

die Definition der Dichte der wahren Elektricität ist. Ferner beweist Hertz später aus den Gleichungen, dass in grossen, ja in den meisten Räumen beide Ausdrücke verschwinden. Was hat es nun für eine Bedeutung, in solchen Räumen P, Q, R als die Kräfte zu definiren, die auf eine hineingebrachte Elektricitätsmenge wirken würden? Das heisst, die wirken würden, wenn daselbst diese Ausdrücke nicht überall Null wären, wenn also die betreffenden Gebiete ganz andere Eigenschaften hätten. Man müsste vielmehr sagen: Um mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bleiben, identificiren wir jetzt den Ausdruck 15n mit der wahren Elektricität, die wir schon früher als erfahrungsmässig gegeben in die Definition aufnahmen.

Vielleicht würde es genügen, P, Q, R bloss als Componenten eines Vektors zu definiren, welcher in jedem Volumelement $d\tau$ des Mediums eine Energie bedingt vom Betrage

$$d\tau \left\{ \frac{K}{8\pi}(P^2 + Q^2 + R^2) + \frac{1}{8\pi\mu}\left[\left(\int_{-\infty}^{t}\frac{dR}{dy}dt - \int_{-\infty}^{t}\frac{dQ}{dz}dt\right)^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\int_{-\infty}^{t}\frac{dP}{dz}dt - \int_{-\infty}^{t}\frac{dR}{dx}dt\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{t}\frac{dQ}{dx}dt - \int_{-\infty}^{t}\frac{dP}{dy}dt\right)^2\right]\right\}.$$

Bloss von dieser letzteren, wenn auch etwas bestimmter mechanisch präcisirten Definition auszugehen, war die Tendenz der ersten Vorlesung.

Die magnetischen Kräfte a, b, c oder α, β, γ noch besonders als Kräfte, die auf einen Magnetpol Eins wirken, zu definiren, halte ich jedenfalls für überflüssig. Sie sind vermöge der Gleichungen 4 und Dn bereits durch P, Q, R definirt, wenn man dazu noch die Annahme nimmt, dass sie vor sehr langer Zeit Null waren. Dass sie den Kräften proportional sind, welche auf einen Solenoidpol wirken, kann dann später aus den Gleichungen bewiesen werden. Stahlmagnete sind dann als Körper aufzufassen, in denen unbekannte kleine Ströme fliessen.

Ich will hierdurch selbstverständlich keineswegs den hohen Werth der Hertz'schen Darstellung in Abrede stellen, sondern nur zeigen, wo deren logische Schärfe noch der Ergänzung zu bedürfen scheint.

§ 4. Elektrostatisches Maasssystem.

Legen wir eine bestimmte mechanische Analogie zu Grunde, so werden die Grössen der vorigen Vorlesung mechanisch definirt sein, und wir werden sie am zweckmässigsten in ihrem natürlichen, d. h. dem dieser mechanischen Analogie entsprechenden Maasse messen. In dem einfachsten Falle z. B., wo F, G, H Verschiebungen sind, haben P, Q, R die Dimensionen einer Geschwindigkeit, K aber die einer Dichte, a ist eine Zahl, daher v eine durch ein Volum dividirte lebendige Kraft.

Bezeichnet man daher mit l, m und t die Dimensionen der Länge, Masse und Zeit, so haben wir folgende Gleichungen, in denen die eckigen Klammern ausdrücken, dass sie sich nur auf die Dimensionen beziehen:

$$10)\quad \begin{cases} [P_n] = l\,t^{-1}, \quad [K] = m\,l^{-3}, \quad [\alpha_n] = m^{-1}\,l t^{-2}, \\ \qquad\qquad [\mu] = [1\,/\,\nu] = m^{-1} l t^2. \end{cases}$$

Dies sind also dann die Dimensionen in einem bestimmten natürlichen Maasssysteme.

Allein, da uns die mechanische Analogie nicht erfahrungsmässig gegeben ist, so können wir die Messung in diesem Maasssysteme nicht praktisch ausführen, und selbst die Dimensionen würden bei Anwendung einer anderen Analogie andere. Für die Praxis ist es daher nothwendig, dem Maasssysteme solche Grössen zu Grunde zu legen, welche der experimentellen Bestimmung zugänglich sind. Solche sind die Verhältnisse der Grössen K für verschiedene Körper, ebenso die der Grösse μ. Bezeichnen wir daher die Werthe von K und μ für irgend einen Körper (den Standardkörper) mit K_l und μ_l, so können wir die Verhältnisse:

$$11)\qquad K : K_l = D, \quad \mu : \mu = M$$

experimentell bestimmen. Als Standardkörper können wir Luft, aber auch jeden beliebigen anderen zu Grunde legen.

Praktisch bestimmbar sind ferner die vier Energiedichten T, V, Γ, W. Aus der Bestimmbarkeit der beiden ersten folgt, dass die sechs Grössen $P_n\sqrt{K}$, $Q_n\sqrt{K}$, $R_n\sqrt{K}$, $\alpha_n\sqrt{\mu}$, $\beta_n\sqrt{\mu}$, $\gamma_n\sqrt{\mu}$, aus der der beiden letzteren, dass auch die Grössen C/K, $X\sqrt{K}$, $Y\sqrt{K}$ und $Z\sqrt{K}$ bestimmbar sind. Wählt man endlich einen Isolator, wo C gleich Null ist, als Standardkörper, und betrachtet dort Stellen, wo keine äusseren elektromotorischen Kräfte wirken, wo also $X = Y = Z = 0$ ist, so ist, wie man leicht aus der Form der Gleichungen sieht, $1\,/\sqrt{K_l\,\mu_l}$ die ebenfalls experimentell bestimmbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen. Wäre der Standardkörper ein Leiter, so wäre daselbst $1/\sqrt{K_l\,\mu_l}$ ebenfalls, wenn auch complicirter experimentell bestimmbar.

Setzen wir also:

$$12)\qquad \frac{C}{K_l} = L, \quad \frac{1}{\sqrt{K_l\,\mu_l}} = \mathfrak{V},$$

so sind auch L und $\mathfrak{V}$ experimentell bestimmbare Grössen. Für die Variabeln $P, Q, R, X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma$ erhalten wir alsdann ein vollständig neues Maasssystem, welches wir das elektrostatische nennen wollen. Da wir dieses Maasssystem im folgenden immer anwenden werden, so wollen wir die darin gemessenen Werthe einfach ohne Index schreiben und erhalten daher die folgenden ebenfalls experimentell bestimmbaren Grössen:

13) $$\left\{\begin{array}{lll} P = P_n\sqrt{K_l}, & Q = Q_n\sqrt{K_l}, & R = R_n\sqrt{K_l}, \\ X = X_n\sqrt{K_l}, & Y = Y_n\sqrt{K_l}, & Z = Z_n\sqrt{K_l}, \\ \alpha = \alpha_n\sqrt{\mu_l}, & \beta = \beta_n\sqrt{\mu_l}, & \gamma = \gamma_n\sqrt{\mu_l}. \end{array}\right.$$

Da in dem einfachsten natürlichen Maasssysteme die Dimensionen durch die Gleichungen 10 gegeben sind, so folgt aus den Gleichungen 13, dass im elektrostatischen Maasssysteme P die Dimensionen:

14) $$[P] = l t^{-1} . m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{3}{2}} = m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1}$$

hat. Dieselben Dimensionen ergeben sich für Q, R, X, Y, Z, α, β, γ.

Führt man in die Gleichungen der vorigen Vorlesung statt der im natürlichen Maasssysteme gemessenen Grössen die im elektrostatischen Maasse gemessenen ein, so erhält man die folgenden Gleichungen, die sich natürlich nur durch die Werthe der Constanten unterscheiden und die wir mit der gleichen Ziffer oder dem gleichen Buchstaben, jedoch unter Weglassung des Index n bezeichnen wollen.

A) $$T = \frac{D}{8\pi}(P^2 + Q^2 + R^2)$$

B) $$V = \frac{M}{8\pi}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

C) $$\left\{\begin{array}{l} \frac{D}{\mathfrak{V}}\frac{dP}{dt} = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} - 4\pi\frac{L}{\mathfrak{V}}(P + X) \\ \frac{D}{\mathfrak{V}}\frac{dQ}{dt} = \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz} - 4\pi\frac{L}{\mathfrak{V}}(Q + Y) \\ \frac{D}{\mathfrak{V}}\frac{dR}{dt} = \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} - 4\pi\frac{L}{\mathfrak{V}}(R + Z) \end{array}\right.$$

$$\text{D)}\quad \begin{cases} \dfrac{M}{\mathfrak{V}}\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{dR}{dy} - \dfrac{dQ}{dz}, \\ \dfrac{M}{\mathfrak{V}}\dfrac{d\beta}{dt} = \dfrac{dP}{dz} - \dfrac{dR}{dx}, \\ \dfrac{M}{\mathfrak{V}}\dfrac{d\gamma}{dt} = \dfrac{dQ}{dx} - \dfrac{dP}{dy}, \end{cases}$$

$$\text{E)}\quad \Gamma = \Lambda - L(XP + YQ + ZR),$$

$$\text{F)}\quad W = \Lambda + L(P^2 + Q^2 + R^2),$$

$$5)\quad \frac{M}{\mathfrak{V}}\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad \frac{M}{\mathfrak{V}}\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \quad \frac{M}{\mathfrak{V}}\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy},$$

$$8)\quad W = L(P^2 + Q^2 + R^2),$$

$$9)\quad \Gamma = -L(XP + YQ + ZR).$$

Natürlich ist hierbei auch

$$F = F_n\sqrt{K_l}, \quad G = G_n\sqrt{K_l}, \quad H = H_n\sqrt{K_l}$$

gesetzt worden.

Für den Magnetismus ist dieses Maasssystem das einzig übliche. Für die Elektricität dagegen ist auch noch ein anderes gebräuchlich. Wir behalten uns daher vor, statt $P, Q, R, X, Y Z$ noch andere Grössen einzuführen, die sich selbstverständlich nur durch einen experimentell gegebenen constanten Faktor davon unterscheiden können. Hierdurch werden natürlich dann auch die Constanten der Gleichungen entsprechend geändert.

Ist uns der Standardkörper nicht bekannt, so kann für einen beliebigen Körper aus A_n bloss KP^2_n und dann aus F_n die Grösse $C/K = (C/K_l).(K_l/K) = L/D$ bestimmt werden. Dies ist also eine Constante des Körpers selbst; man erkennt dies auch aus den beiden Gleichungen C und D, welche Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption der elektrischen Schwingungen durch $\mathfrak{V}$ und L/D ausdrücken.[1]) Nur wenn ausser dem betreffenden Körper auch noch der Standardkörper gegeben ist, ist P_n im ersteren Körper in dem dem Standardkörper entsprechenden elektrostatischen Maasse, also auch $K_l P_n^2$ bekannt; es kann daher $L = C/K_l$ auch für den ersteren Körper bestimmt werden oder noch einfacher, da D bekannt

[1]) Vergl. Cohn, Berl. Ber. 26, S. 405, 1889; Hertz, Ges. Abh. S. 218.

ist, aus der Constanten L/D des ersteren Körpers L für diesen gefunden werden.

§ 5. Grenzbedingungen für die Trennungsfläche zweier Körper.

Aus den Gleichungen C und D können wir nach dem früher erwähnten Principe der Continuität der Uebergänge ohne Weiteres die Grenzbedingungen für die Trennungsfläche zweier Körper ableiten, falls in diesen selbst keine unendlichen äusseren elektromotorischen Kräfte ihren Sitz haben.

Wir zeichnen ein unendlich kleines Rechteck mit den Seiten ε und ζ auf der Trennungsfläche. Dieses Flächenelement $do = \varepsilon . \zeta$ der Trennungsfläche betrachten wir nicht als mathematische Fläche, sondern als ein Parallelepiped von von der Basis $\varepsilon \zeta$ und der Höhe δ. Eine nothwendige Voraussetzung für die Ableitbarkeit besteht nun darin, dass die Dicke δ der Trennungsschicht so klein ist, dass sich Längen denken lassen, die sehr gross gegenüber δ sind, aber noch immer als Differenziale betrachtet werden können. Diese Voraussetzung hat ihr Analogon überall in der mathematischen Physik, wo immer man Volumelemente construirt, die gross gegenüber den Dimensionen eines Molecüls sind, aber selbst noch als Differenziale betrachtet werden können. Solche Längen, gross gegenüber δ, aber noch immer unendlich klein, sollen ε und ζ sein.

Wir legen zunächst den Coordinatenanfangspunkt in eine Ecke des Parallelepipeds $\delta \varepsilon \zeta$, die Abscissenaxe parallel zu δ, die y- und z-Axe parallel zu ε resp. ζ. Für jeden Punkt mit den Coordinaten x, y, z im Innern des Parallelepipeds sollen die Gleichungen D gelten, deren zweite lautet:

$$\frac{M}{\mathfrak{V}} \frac{d\beta}{dt} = \frac{dP}{dx} - \frac{dR}{dx}.$$

Wir können nun im Innern des Parallelepipeds $\delta \varepsilon \zeta$ ein Parallelepiped $dx\,dy\,dz$ construiren, wobei dx, dy und dz wiederum unendlich klein gegen δ sind. Die letzte Gleichung multipliciren wir mit $dx\,dy\,dz$ und integriren über das ganze Parallelepiped $\delta \varepsilon \zeta$. Dies liefert:

$$10\text{a)}\quad \begin{cases} \iiint \frac{M}{\mathfrak{B}} \frac{d\beta}{dt} dx\,dy\,dz - \iint dx\,dy\,(P_1 - P_0) \\ \qquad + \iint dy\,dz\,(R_1 - R_0) = 0. \end{cases}$$

Das erste Integral kann auch so geschrieben werden:

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} \overline{M \frac{d\beta}{dt}} \delta \varepsilon \zeta,$$

wobei $\overline{M d\beta/dt}$ irgend ein Mittelwerth aller $M d\beta/dt$ ist. Ebenso kann das zweite und dritte Integral in der Form geschrieben werden $(\overline{P_1} - \overline{P_0}) \delta \varepsilon$ resp. $(\overline{R_1} - \overline{R_0}) \varepsilon \zeta$. Da unserer Annahme gemäss M, α, β, γ, P, Q, R und daher auch deren Differentialquotienten nach der Zeit nirgends unendlich gross und δ unendlich klein gegenüber ε und ζ ist, so liefern die beiden ersten Integrale der Gleichung 10a durch $\varepsilon \zeta$ dividirt, noch immer verschwindendes. Daher muss auch der Werth des letzten Integrales, durch $\varepsilon \zeta$ dividirt, noch unendlich klein sein und man erhält:

$$\overline{R_1} = \overline{R_0}.$$

$\overline{R_1}$ ist ein Mittelwerth aller Werthe, welche R auf der einen (der positiven Abscissenrichtung zugewendeten) Seite des Parallelepipeds $\delta \varepsilon \zeta$ hat. Wenn die Function R ausserhalb des Parallelepipeds continuirlich ist, können wir daher einfach dafür R_1, den Werth von R auf der betreffenden Seite der Trennungsschicht, setzen. Ebenso für $\overline{R_0}$ den Werth R_0 von R auf der anderen Seite der Trennungsschicht.

Vertauscht man die y- und z-Axe und stellt man dieselben Betrachtungen für β und γ an, so erhält man:

$$\text{a)}\quad \begin{cases} Q_1 = Q_0, & R_1 = R_0 \\ \beta_1 = \beta_0, & \gamma_1 = \gamma_0. \end{cases}$$

Steht die Trennungsfläche beliebig und ist n ihre Normale an der betreffenden Stelle, so muss die Bedingung

$$(P_1 - P_0) \cos(Tx) + (Q_1 - Q_0) \cos(Ty) + (R_1 - R_0) \cos(Tz) = 0$$

für jede Gerade T erfüllt sein, deren Richtungscosinus der Gleichung:

$$\cos(Tx) \cos(nx) + \cos(Ty) \cos(ny) + \cos(Tz) \cos(nz) = 0$$

genügen. Setzt man zuerst einen der drei Winkel zwischen T und einer Coordinatenaxe gleich 90, so folgt:

b) $$\frac{P_1 - P_0}{\cos(n\,x)} = \frac{Q_1 - Q_0}{\cos(n\,y)} = \frac{R_1 - R_0}{\cos(n\,z)}$$

und ebenso:

c) $$\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\cos(n\,x)} = \frac{\beta_1 - \beta_0}{\cos(n\,y)} = \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\cos(n\,z)}.$$

Aus den drei Gleichungen D folgt:

$$\frac{d}{d\,t}\left[\frac{d\,(M\,\alpha)}{d\,x} + \frac{d\,(M\,\beta)}{d\,y} + \frac{d\,(M\,\gamma)}{d\,z}\right] = 0.$$

Eine ähnliche Gleichung folgt aus den Gleichungen C, M und D sind dabei als mit der Zeit nicht veränderlich vorausgesetzt.

Wählen wir daher zunächst wieder die Normale zu einer Fläche sehr raschen Uebergangs zur x-Axe, so ergiebt sich hieraus:

d) $$\begin{cases} \frac{d}{d\,t}(M_1\,\alpha_1 - M_0\,\alpha_0) = 0 \\ \frac{1}{4\,\pi}\frac{d}{d\,t}(D_1\,P_1 - D_0\,P_0) + L_1\,P_1 - L_0\,P_0 = 0. \end{cases}$$

Für den Fall, dass in der zur Abscissenaxe senkrechten Trennungsschicht nur X unendlich, aber $\int X\,d\,x = \varphi_{12}$ endlich bleibt, ändern sich die Gleichungen für α, β, γ nicht, für die elektrischen Kräfte aber erhält man:

e) $$\begin{cases} Q_1 - Q_0 = \frac{d\,\varphi_{12}}{d\,y} \\ R_1 - R_0 = \frac{d\,\varphi_{12}}{d\,z} \\ \frac{1}{4\,\pi}\frac{d}{d\,t}(D_1 P_1 - D_0 P_0) + L_1 (P_1 + X_1) - L_0\,(P_0 + X_0) = 0. \end{cases}$$ [1]

Uebrigens glaube ich, dass man diesen Fall immer ausschliessen kann, wenn man die experimentell nicht constatirbare Spannungsdifferenz reiner Metalle gleich Null setzt, wo aber elektromotorische Kräfte thätig sind, z. B. an der Contactstelle zwischen Zn und SO_4H_2, ihren Spielraum auf eine Schicht ausgedehnt annimmt, die zwar immer noch dünn, aber doch sehr dick gegenüber der oben betrachteten eigentlichen Trennungsschicht der beiden Körper ist.

Wäre die Normale nicht der x-Axe parallel, so hätte in obigen Formeln überall die Componente in der Normalrichtung an Stelle der in der Abscissenrichtung zu treten.

---

[1] Vgl. Hertz, Ges. Abh. p. 222.

Dritte Vorlesung.

§ 6. Begriff der wahren und neutralen Elektricität. Bild behufs Veranschaulichung der Integrale obiger Gleichungen. Erster Zug des Bildes.

Mit den Annahmen, deren wir zur Erklärung des Elektromagnetismus bedürfen, sind wir hiermit vollständig zu Ende. Alles Folgende enthält nur Consequenzen dieser Annahmen, also Folgerungen aus den Gleichungen, zu denen sie führten. Zur Versinnlichung dieser Consequenzen werden wir vielfach neue mechanische Bilder zuziehen; doch bemerken wir schon hier, dass wir diese bloss zur Versinnlichung dienenden Bilder von der mechanischen Grundlage der Theorie wohl unterschieden wissen wollen.

Wer unter einer mechanischen Theorie überhaupt nur ein Analogon versteht, wird in dem bisher Vorgetragenen wohl auch nur ein Bild erblicken; aber doch bleibt der Unterschied zwischen der mechanischen Grundlage der Theorie und den zur Versinnlichung einzelner Consequenzen derselben dienenden Bildern bestehen.

Einen Körper, in welchem L einen verschwindenden Werth hat, also $L = 0$ gesetzt werden kann, nennen wir einen Isolator. Sind daselbst zur betrachteten Zeit zudem auch keine äusseren elektromotorischen Kräfte thätig, so werden auch X, Y, Z nicht in solcher Weise unendlich, dass die Produkte LX, LY, LZ von Null verschieden ausfielen und man erhält, wenn man von den Gleichungen C die erste nach x, die zweite nach y, die dritte nach z partiell differenzirt, addirt und wieder, da wir die ponderabeln Körper als unbewegt und mit der Zeit unveränderlich betrachten, D als unabhängig von t voraussetzt:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d(DP)}{dx} + \frac{d(DQ)}{dy} + \frac{d(DR)}{dz}\right] = 0.$$

Die Grösse in der eckigen Klammer kann sich also mit der Zeit nicht ändern. Wäre sie zu Anfang gleich Null, so bliebe sie, so lange an der betreffenden Stelle selbst keine äusseren elektromotorischen Kräfte thätig sind, immer gleich Null; hat

sie dagegen durch früher thätige elektromotorische Kräfte einen von Null verschiedenen Werth angenommen, so bleibt derselbe, so lange er nicht durch neuerdings thätige äussere elektromotorische Kräfte vernichtet oder verändert wird, ein für alle Mal festgenagelt.

Man kann sich die Sache, wenn man will, so vorstellen, als ob der Isolator durch die Wirksamkeit der äusseren elektromotorischen Kräfte mit einem Fluidum erfüllt worden wäre, dessen Dichte in irgend einem Volumelemente

15) $$\varepsilon_w = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d(DP)}{dx} + \frac{d(DQ)}{dy} + \frac{d(DR)}{dz}\right]$$

ist, und als ob dieses Fluidum in dem betreffenden Isolator vollkommen unbeweglich wäre; $\varepsilon_w d\tau$ ist die mit der Zeit unveränderliche Menge des im Volumelemente $d\tau$ enthaltenen Fluidums.

Wir wollen $\varepsilon_w d\tau$ als die wahre, im Volumelemente $d\tau$ enthaltene Elektricität, ε_w als deren Dichte bezeichnen. Den Index lassen wir, wo keine Verwechslung zu befürchten ist, weg. Da die rechte Seite der Gleichung 15 ebensogut negative als positive Werthe haben kann, so werden wir uns die Sache besser so vorstellen, dass schon im normalen unelektrischen Zustande jedes Volumelement $d\tau$ eine grosse Menge $m\,d\tau$ dieses Fluidums enthält, welche wir dessen neutrale Elektricität nennen, und dass $\varepsilon\,d\tau$ bloss den Ueberschuss resp. Unterschuss über dessen neutrale Elektricität bedeutet. m heisst dann die Dichte der neutralen Elektricität, welche im Isolator bei Abwesenheit äusserer elektromotorischer Kräfte ebenfalls vollkommen festgenagelt ist.

Die Elektricität betrachten wir daher als ein bloss zur Versinnlichung der Integrale gewisser Gleichungen dienendes Gedankending im Gegensatz zum Aether, den wir für etwas materielles halten.

Die bisher vorgetragene Anschauungsweise ist die sogenannte unitarische. Sie reicht in allen Fällen aus und ist die einfachste. Sie lässt aber in einigen Punkten eine gewisse Dunkelheit bestehen. Ich will daher lieber hier die allerdings complicirtere dualistische Anschauungsweise adoptiren, da mir in derselben die Dunkelheiten auf ein Minimum reducirt scheinen. Da wir hier nicht mit wirklichen Stoffmengen, son-

dern mit blossen Gedankendingen operiren, so ist dies Geschmackssache und ich ziehe eine grössere Complication dem Fortbestehen der leisesten Unklarheit vor.

Nach der dualistischen Anschauung giebt es zweierlei Elektricitäten, die positive und die negative. Ein Quantum der ersteren wird immer mit positivem, eines der letzteren mit negativem Zeichen bezeichnet. Im neutralen Zustande soll in jedem Volumelemente $d\tau$ die Menge:

$$\frac{m\,d\tau}{2}$$

positiver und

$$-\frac{m\,d\tau}{2}$$

negativer Elektricität enthalten sein. Enthält dagegen das Volumelement $d\tau$ die wahre Elektricitätsmenge $\varepsilon\,d\tau$, so stellen wir uns vor, dass darin die Menge:

$$\frac{m+\varepsilon}{2}\,d\tau$$

positiver und

$$-\frac{m-\varepsilon}{2}\,d\tau$$

negativer Elektricität vorhanden ist. Die neutrale Elektricität ist also die Summe der Absolutwerthe aller darin enthaltenen Elektricitätsmengen ohne Rücksicht auf das Zeichen:

$$\left(\frac{m+\varepsilon}{2}+\frac{m-\varepsilon}{2}\right)d\tau,$$

was wir immer kurz Summe der Absolutwerthe nennen wollen. Die wahre Elektricität dagegen ist die Summe aller Elektricitätsmengen mit Rücksicht auf ihr Zeichen (algebraische Summe):

$$\left(\frac{m+\varepsilon}{2}-\frac{m-\varepsilon}{2}\right)d\tau.$$

Im vollkommenen Nichtleiter ist also alle positive und negative, sowohl neutrale als auch wahre Elektricität vollkommen festgenagelt.

Der Nutzen unseres Bildes springt noch mehr in die Augen, wenn wir zu dem Falle übergehen, wo L, X, Y, Z, von Null verschieden sind. Dann erhalten wir, wenn wir von

den Gleichungen C die erste partiell nach x, die zweite partiell nach y, die dritte partiell nach z differenziren und addiren:

$$16)\qquad \frac{d\,\varepsilon_w}{d\,t} + \frac{d\,L(P+X)}{d\,x} + \frac{d\,L(P+Y)}{d\,y} + \frac{d\,L(P+Z)}{d\,z} = 0.$$

Die allgemeine Integration dieser Gleichung ist selbst für die einfachsten Verhältnisse weitschweifig und schwierig; es ist daher ein sehr günstiger Umstand, dass sich ihre Bedeutung durch die schon erwähnte symbolische Vorstellungsweise ungemein leicht interpretiren lässt.

Wir stellen uns vor, als ob in dem jetzt betrachteten Falle die Elektricität im Innern der Körper strömen würde, und zwar die in dem Volumelemente $d\tau$ enthaltene positive Elektricität mit einer Geschwindigkeit, welche in den drei Coordinatenrichtungen die Componenten:

$$17)\qquad u' = \frac{L}{m}(P+X),\qquad v' = \frac{L}{m}(Q+Y),\qquad w' = \frac{L}{m}(R+Z)$$

hat, die negative mit genau gleicher, aber entgegengesetzt gerichteter Geschwindigkeit. Durch ein beliebiges Flächenelement $d\,o$ im Innern eines beliebigen Körpers tritt also während der Zeit $d\,t$ die Menge

$$18)\qquad L\,\frac{m+\varepsilon}{2\,m}(S+N)\,d\,o\,d\,t$$

positiver Elektricität von der einen Seite (s_1) gegen die andere (s_2) hindurch. Dabei ist n die von s_1 gegen s_2 hin gezogene Normale zu $d\,o$.

$$19)\qquad \begin{cases} N = P\cos(n\,x) + Q\cos(n\,y) + R\cos(n\,z), \\ S = X\cos(n\,x) + Y\cos(n\,y) + Z\cos(n\,z) \end{cases}$$

sind die Componenten der Vektoren (P, Q, R) und (X, Y, Z) in der Richtung n. Durch dasselbe Flächenelement $d\,o$ geht in derselben Zeit $d\,t$ die negative Elektricitätsmenge:

$$-\,L\,\frac{m-\varepsilon}{2\,m}(S+N)\,d\,o\,d\,t$$

in der entgegengesetzten Richtung. Die algebraische Summe aller Elektricitätsmengen, welche während der Zeit $d\,t$ in der Richtung, nach welcher die Normale n gezogen wurde, durch das Flächenelement $d\,o$ gehen, ist also:

$$20)\qquad \omega\,d\,t\,d\,o = L(S+N)\,d\,t\,d\,o.$$

Fällt n mit der Strömungsrichtung der neutralen Elektricität zusammen, so geht ω in das über, was man die gesammte Stromdichte

$$\Omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

nennt; deren Componenten in den drei Coordinatenrichtungen aber erhält man, wenn man n mit der betreffenden positiven Coordinatenaxe zusammenfallen lässt. Diese Componenten sind also:

21) $p = mu' = L(P+X)$, $q = mv' = L(Q+Y)$, $r = mw' = L(R+Z)$.

Construiren wir daher ein Parallelepiped, von dem drei aneinanderstossende Kanten die Längen dx, dy, dz haben und den Coordinatenrichtungen parallel sind, so strömt durch die der negativen Abscissenaxe zugewandte (linke) Begrenzungsfläche desselben während der Zeit dt die positive Elektricitätsmenge

$$L\frac{m+\varepsilon}{2m}(P+X)\,dy\,dz\,dt$$

ein, die negative Elektricitätsmenge

$$-L\frac{m-\varepsilon}{2m}(P+X)\,dy\,dz\,dt$$

aus. Die algebraische Summe aller einströmenden Elektricität ist also, wenn man ausströmende als negative einströmende zählt:

$$L(P+X)\,dy\,dz\,dt.$$

Ebenso findet man für die algebraische Summe der durch die vis à vis liegende Begrenzungsfläche des Parallelepipeds ausströmenden Elektricität den Werth:

$$L(P+X)\,dy\,dz\,dt + \frac{dL(P+X)}{dx}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Da dasselbe auch von den beiden anderen Coordinatenaxen gilt, so ist die algebraische Summe der gesammten Elektricitätsmenge, welche aus den Parallelepiped während der Zeit dt mehr aus- als in dasselbe eingetreten ist:

$$dx\,dy\,dz\,dt\left[\frac{dL(P+X)}{dx} + \frac{dL(Q+Y)}{dy} + \frac{dL(R+Z)}{dz}\right].$$

Dabei ist jede eingetretene negative und ausgetretene positive mit positivem, dagegen jede ausgetretene negative und eingetretene positive mit negativem Zeichen gezählt. Dies muss also die Verminderung $-d\varepsilon\,d\tau$ der in $d\tau$ enthaltenen wahren

Elektricität (der algebraischen Summe aller daselbst befindlichen Elektricität) während der Zeit dt darstellen. Wir erhalten also genau die Gleichung 16. Die Fiktion eines derartigen Fluidums ist daher ein willkommener Behelf, uns die wahre Bedeutung dieser Gleichung und den Verlauf der durch sie ausgedrückten Erscheinungen zu veranschaulichen.

Die Summe der Absolutwerthe aller in $d\tau$ enthaltenen Elektricität, also die daselbst enthaltene neutrale Elektricität, wächst demnach während $d\tau$ um den Betrag:

$$\frac{1}{m} d\tau\, dt \left[\frac{d L \varepsilon (P + X)}{dx} + \frac{d L \varepsilon (Q + Y)}{dy} + \frac{d L \varepsilon (R + Z)}{dz}\right].$$

Da wir m immer als gross gegen ε voraussetzen, ist dieser Betrag klein gegen die ursprünglich in $d\tau$ enthaltene neutrale Elektricität $m\,d\tau$, und wir müssen unser Bild durch die Annahme vervollständigen, dass die in dieser Weise bewirkte kleine Aenderung der neutralen Elektricität an den verschiedenen Stellen des Raumes sich rasch wieder ausgleicht, ohne zu beobachtbaren Erscheinungen Veranlassung zu geben. Uebrigens werden wir sehen, dass ε im Innern der Leiter, wo allein bemerkbare Strömung stattfinden kann, nur während verschwindend kurzer Zeit einen von Null verschiedenen Werth haben kann, dass also einer der Faktoren L oder ε immer verschwindet, so dass diese Anhäufung neutraler Elektricität bei beobachtbaren Erscheinungen überhaupt ausgeschlossen ist.

§ 7. Zweiter Zug des Bildes.

Wir können uns die fingirte Bewegung der neutralen Elektricität noch weiter durch die Vorstellung versinnlichen, dass sie durch äussere Kräfte erzeugt werde. Die einfachste Annahme ist dann, dass die neutrale Elektricität sich mit grosser, ihrer Geschwindigkeit proportionaler Reibung bewegt, so dass ihre Geschwindigkeit der auf sie wirkenden Kraft proportional ist. Wäre also $\varkappa$ die Kraft, welche auf die Mengeneinheit der positiven Elektricität wirkt, ξ, η, ζ deren Componenten in den Coordinatenrichtungen, so müssten diese proportional den Grössen $P + X$, $Q + Y$, $R + Z$ sein, so dass man hätte:

$$\xi = B(P + X), \quad \eta = B(Q + Y), \quad \zeta = B(R + Z).$$

Vergleicht man dies mit den Gleichungen 17, so ergiebt sich der Proportionalitätsfaktor zwischen der Geschwindigkeit der neutralen Elektricität und der Kraft, welche auf deren Mengeneinheit wirkt, gleich

$$\frac{L}{m B}$$

und es ist:

$$u' = \frac{L}{m B}\xi, \quad v' = \frac{L}{m B}\eta, \quad w' = \frac{L}{m B}\zeta.$$

Um B zu bestimmen, müssen wir die in unserem Bilde durch Reibung der neutralen Elektricität entwickelte Wärme mit der wirklich entwickelten vergleichen. Experimentell vollkommen klar gestellt sind bisher nur die Vorgänge an denjenigen Stellen, wo keine äusseren elektromotorischen Kräfte wirken. Betrachten wir also zunächst nur solche Stellen, setzen also:

$$X = Y = Z = 0,$$

und vernachlässigen zudem ε gegen m. Dann ist im Volumelemente $d\tau$ einfach die positive Elektricitätsmenge

$$\frac{m\,d\tau}{2}$$

und die gleiche negative Elektricitätsmenge enthalten; jede bewegt sich mit der Geschwindigkeit u', erstere in der positiven, letztere in der negativen Abscissenrichtung; auf jede wirkt in der Richtung ihrer Bewegung die Kraft $m\xi\,d\tau\,/\,2$, so dass im Volumelemente $d\tau$ in der Zeit dt in unserem Bilde die Arbeit:

$$m\,dt\,d\tau\,(\xi u' + \eta v' + \zeta w') = dt\,d\tau\,B\,L\,(P^2 + Q^2 + R^2)$$

durch Ueberwindung der Reibungskräfte in Wärme verwandelt wird. Andererseits fanden wir für die Joule'sche Wärme die Gleichung 8. Damit beide übereinstimmen, müssen wir setzen:

$$B = 1.$$

An den Stellen der Wirksamkeit äusserer elektromotorischer Kräfte, also wo X, Y, Z von Null verschieden sind, würde durch Reibung des elektrischen Fluidums die Wärme:

$$m\,dt\,d\tau(\xi u' + \eta v' + \zeta w') = dt\,d\tau\,L[(P+X)^2 + (Q+Y)^2 + (R+Z)^2]$$

entwickelt werden, was mit der Gleichung F nur übereinstimmt, wenn wir dem Λ den Werth 102 (vgl. Vorl. 14 § 30) ertheilen. Um andere Werthe von Λ in unserem Bilde darzustellen, müsste

man eine neue Hypothese hinzufügen, z. B. die einer besonderen Anziehung der ponderablen Moleküle gegen die elektrischen Fluida an den Stellen der Wirksamkeit äusserer elektromotorischer Kräfte. Doch wollen wir hiervon um so mehr absehen, als die betreffende Lücke auch in der Maxwell'schen Theorie noch nicht ausgefüllt ist.

Unter den gemachten Voraussetzungen und Einschränkungen liefert unser Bild auch den Energieumsatz in richtiger Weise. Es ist dann:

$$22) \qquad \xi = P + X, \quad \eta = Q + Y, \quad \zeta = R + Z.$$

Wir bezeichneten die algebraische Summe aller Elektricität, welche in der Zeiteinheit durch eine senkrecht zur x-, resp. y- oder z-Axe gelegte Fläche vom Querschnitt Eins hindurchgeht, als die betreffende Componente p, resp. q oder r der Stromdichte und die algebraische Summe aller Elektricität, welche in der Zeiteinheit durch eine beliebige Fläche vom Querschnitt Eins hindurchgeht, als die Componente ω der Stromdichte senkrecht zu dieser Fläche; wenn aber die Fläche senkrecht zur Stromrichtung ist, als die gesammte Stromdichte Ω. Für alle diese Grössen folgt also aus den Gleichungen 21:

$$23) \quad \begin{cases} p = L\xi = L(P + X), \; q = L\eta = L(Q + Y) \\ r = L\zeta = L(R + Z), \; \omega = L(S + N), \\ \Omega = L v_1 = L\sqrt{N_1^2 + S_1^2 - 2 N_1 S_1 \cos(N_1 S_1)}, \end{cases}$$

wo v_1, N_1 und S_1 die Längen der Vektoren (ξ, η, ζ), (P, Q, R) (X, Y, Z) sind. Die Gleichung 16 besagt, dass der Zuwachs der wahren Elektricität in jedem Volumelemente gleich sein muss der Menge neutraler Elektricität, welche mehr ein- als ausströmt. Dasselbe muss auch von einem beliebigen endlichen Raume T, der von einer beliebigen geschlossenen Fläche umgrenzt ist, gelten. Die darin enthaltene wahre Elektricität ist $\int \varepsilon \, d\tau$, wo die Integration über den ganzen Raum T zu erstrecken ist. Die während der Zeit dt eintretende neutrale Elektricität ist:

$$dt \int \omega \, do,$$

wo die Integration über die Begrenzungsfläche des Raumes T sich erstreckt und die Normale n nach innen zu ziehen ist.

Es ist also:

$$\frac{d}{dt}\int \varepsilon\, d\tau = \int \omega\, do,$$

oder, wenn man die Werthe substituirt:

$$24)\quad \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int d\tau\left[\frac{d(DP)}{dx}+\frac{d(DQ)}{dy}+\frac{d(DR)}{dz}\right] \\ = \int do L[(P+X)\cos(nx)+(Q+Y)\cos(ny)+(R+Z)\cos(nz)]. \end{cases}$$

Da in einem Isolator, in dessen Innern keine elektromotorischen Kräfte wirken, sowohl die wahre als auch die neutrale Elektricität vollkommen festgenagelt ist, so folgt unmittelbar, dass in einem Systeme von Körpern, welches rings von einem derartigen Isolator umgeben ist, die gesammte Quantität der wahren Elektricität weder vermehrt noch vermindert werden kann, dass also z. B. im ganzen Universum immer genau gleich viel positive wie negative Elektricität erzeugt werden muss. Die Gleichung 24 kann natürlich auch ohne unser mechanisches Bild durch partielle Integration aus der Gleichung 16 abgeleitet werden.

Wir sahen, dass man P, Q, R, X, Y, Z auch in einem anderen Maasssysteme messen kann. Wir bezeichnen die in einem beliebigen Maasssystem gemessenen Grössen mit dem Index h. Dann ist, wenn wir mit h eine beliebige Constante bezeichnen, zu setzen:

$$13\text{h})\quad \begin{cases} P = P_h/h, & Q = Q_h/h, & R = R_h/h, \\ X = X_h/h, & Y = Y_h/h, & Z = Z_h/h. \end{cases}$$

Die Annahme der letzteren drei Substitutionen empfiehlt sich, damit X, Y, Z wieder einfach zu P, Q, R addirt erscheinen. Die Gleichungen A und D gehen dann über in:

$$\text{Ah})\quad T = \frac{D}{8\pi h^2}(P_h^2 + Q_h^2 + R_h^2),$$

$$\text{Dh})\quad \begin{cases} \frac{hM}{\mathfrak{B}}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dR_h}{dy} - \frac{dQ_h}{dz}, \quad \frac{hM}{\mathfrak{B}}\frac{d\beta}{dt} = \frac{dP_h}{dz} - \frac{dR_h}{dx}, \\ \frac{hM}{\mathfrak{B}}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dQ_h}{dx} - \frac{dP_h}{dy}. \end{cases}$$

Es ist gut, die wahre Elektricität jetzt so zu definiren, dass P_h, Q_h, R_h wieder die Kräfte auf die Elektricitätsmenge Eins

sind. Die Dichte der wahren Elektricität im neuen Maass gemessen ist dann:

15h) $$\varepsilon_h = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{1}{4\pi h^2}\left(\frac{d(DP_h)}{dx} + \frac{d(DQ_h)}{dy} + \frac{d(DR_h)}{dz}\right).$$

Auch in p, q, r, ω und Ω haben wir statt der elektrostatisch gemessenen dann die im neuen Maasse gemessene Eiektricitätsmenge zu substituiren und fügen deshalb den Index h bei. Unter p_h z. B. ist die im neuen Maasse gemessene Elektricitätsmenge zu verstehen, welche in der Zeiteinheit durch eine auf der Abscissenaxe senkrechte Flächeneinheit hindurchgeht, so dass wir erhalten:

21h) $$p = p_h \cdot h\,,\quad q = q_h \cdot h\,,\quad r = r_h \cdot h\,,\quad \omega = \omega_h \cdot h\,,\quad \Omega = \Omega_h \cdot h\,.$$

Damit nun wieder die Gleichungen 8, 9 und 23 keinen besonderen Faktor erhalten, führen wir noch statt der elektrostatisch gemessenen Leitungsfähigkeit L eine neue Constante ein:

12h) $$L_h = L / h^2$$

(die im neuen Maasse gemessene Leitungsfähigkeit), so dass wir erhalten:

23h) $$\begin{cases} p_h = L_h(P_h + X_h)\,,\ q_h = L_h(Q_h + Y_h),\ r_h = L_h(R_h + Z_h), \\ \omega_h = L_h(N_h + S_h). \end{cases}$$

8h) $$W = L_h(P_h^2 + Q_h^2 + R_h^2)$$

9h) $$\Gamma = -L_h(P_h X_h + Q_h Y_h + R_h \cdot Z_h)$$

Ch) $$\frac{D}{h\mathfrak{V}}\frac{dP_h}{dt} = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} - 4\pi\frac{hL_h}{\mathfrak{V}}(P_h + X_h)$$

Vierte Vorlesung.

§ 8. Besonderer Charakter der nun zu suchenden Integrale.

Die entwickelten Gleichungen stellen im Allgemeinen eine Wellenbewegung dar. Betrachtet man einen homogenen Körper, in dessen Innern keine äussern elektromotorischen Kräfte wirken, setzt also D und L constant, $X = Y = Z = 0$, so liefern die Gleichungen C und 15:

25) $$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{4\pi L}{D}\varepsilon = 0,$$

also:

$$\varepsilon = A e^{-4\pi L t / D}.$$

War nun irgend einmal der Körper unelektrisch, und haben seitdem in seinem Innern keine äussern elektromotorischen Kräfte gewirkt, so muss auch damals die letzte Gleichung gegolten haben. Da aber damals $\varepsilon = 0$ war, so muss auch $A = 0$ und daher für alle Folgezeit $\varepsilon = 0$ sein. Da D constant ist, folgt weiter:

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = 0.$$

und man erhält aus der ersten der Gleichungen C, indem man für β und γ deren Werthe aus den Gleichungen D substituirt:

$$MD\frac{d^2P}{dt^2} + 4\pi ML\frac{dP}{dt} = \mathfrak{V}^2 \Delta P$$

wobei:

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$

ist. Analoge Gleichungen gelten für g und h. Für $L = 0$ werden hierdurch bekanntermaassen Transversalwellen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\frac{\mathfrak{V}}{\sqrt{DM}}$$

dargestellt. Hat L einen von Null verschiedenen Werth, so werden die Wellen gedämpft (Absorption) und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist für verschiedene Schwingungsdauern

verschieden (Dispersion). Wir befriedigen die Gleichungen, wenn wir setzen:

$$P = B\, e^{-2\pi a M L x/\mathfrak{V}^2} \cos n \left(t - \frac{x}{a}\right),$$

wobei B und n beliebige Constanten sind, wogegen man hat:

26) $$\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{MD}{2\mathfrak{V}^2} + \sqrt{\frac{M^2 D^2}{4\mathfrak{V}^4} + \frac{4\pi^2 M^2 L^2}{n^2 \mathfrak{V}^4}}}.$$

Dies stellt eine Transversalwelle dar, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit a ist. Wir wollen die Behandlung der Gesetze dieser Wellenbewegungen einem viel späteren Kapitel vorbehalten und hier nur bemerken, dass ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ausserordentlich gross (wie die Lichtgeschwindigkeit) ist. Im Falle, wo $L = 0$ ist, muss also $\sqrt{DM}/\mathfrak{V}$ ausserordentlich klein sein. Da in Formel 26 der Wurzelausdruck unter dem ersten Wurzelzeichen jedenfalls mit positiven Zeichen genommen werden muss, so folgt, dass auch, wenn L von Null verschieden ist, $\sqrt{DM}/\mathfrak{V}$ klein wie die reciproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen oder noch kleiner sein muss.

Die Berechnung des gesammten Verlaufes der durch eine beliebige elektromagnetische Störung hervorgerufenen Wellen stösst nun selbst in den einfachsten Fällen auf fast unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten. Dass es trotzdem möglich ist, in vielen Fällen sehr einfache Gesetze aus den Gleichungen abzuleiten, verdanken wir einem günstigen Umstande, dessen Wesen ich zunächst an einigen Beispielen aus der Elasticitätslehre erläutern will.

Gesetzt, wir hätten eine gespannte Saite oder Schnur. Der eine Endpunkt A derselben sei vollkommen fix, dem anderen Endpunkte B werde mit der Hand oder sonstwie eine ganz beliebige Bewegung senkrecht zur ursprünglich geraden Linie AB ertheilt. Im Allgemeinen werden dadurch Wellen entstehen, welche in A reflektirt werden, und deren Gesammtresultat bald nur mehr durch lange Summenformeln ausdrückbar ist. Wenn aber die Bewegung des Punktes B so langsam geschieht, dass die Wellenlänge sehr gross gegen die Fadenlänge ist, so wird keine Spur von Wellenbewegung bemerkbar sein.

So einfach und bekannt dies ist, so sind doch die mathe-

matischen Bedingungen der Bewegungsart, welche der Faden im letzteren Falle macht, meines Wissens noch nie genau geprüft worden. Gerade diese Bewegungsart spielt aber fast überall eine wichtige Rolle, wo Massen, die in einer Linie, Fläche oder im Raume continuirlich vertheilt sind, sehr langsam zur Bewegung angeregt werden. Sie ist keine stationäre, da sie nach langer Zeit ihren Charakter völlig verändern kann, eher könnte man sie als angenähert stationär oder besser als langsam gegenüber der Wellenfortpflanzung in dem in Betracht kommenden Gebiete bezeichnen. Um diesen Begriff schärfer zu fassen, wollen wir in dem eben besprochenen einfachen Falle mit w irgend eine Grösse bezeichnen, die sich auf den Zustand des Fadens an einer Stelle bezieht; z. B. die Entfernung der betreffenden Stelle von ihrer Ruhelage oder die daselbst herrschende Geschwindigkeit etc. Ferner bezeichnen wir mit a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen in dem Faden, mit l dessen Länge. Damit die Bewegung von der gesuchten Beschaffenheit sei, muss die Anregung folgende Bedingung erfüllen. Es muss

$$\frac{l}{a}\frac{d w_B}{d t}$$

klein gegenüber den in Betracht kommenden Veränderungen des Werthes von w, also namentlich klein gegenüber der Differenz zwischen dem grössten und kleinsten der vorkommenden Werthe des w sein, was wir etwa in der Form schreiben können:

$$27)\qquad \frac{l}{a}\frac{d w_B}{d t} \quad k\,l{\cdot}g{\cdot} \quad w_{\max} - w_{\min};$$

der Index B drückt dabei den Werth an dem zur Bewegung angeregten Ende B aus. Wenn w eine Länge und $w_{\max} - w_{\min}$ von der Grössenordnung l ist, so wird einfach $d w_B / d t$ klein gegen a. Für die Bewegung an irgend einer Stelle, die wir durch ihre Entfernung x vom fixen Ende A charakterisiren wollen, wird dann immer

$$28)\qquad \frac{1}{a}\frac{d w}{d t} \quad k\,l{\cdot}g{\cdot} \quad \frac{d w}{d x}$$

sein. Für die Wellenbewegung ist ja

$$w = f(x \pm a\,t),$$

daher:

$$\frac{1}{a}\frac{dw}{dt} = \pm\frac{dw}{dx}.$$

28 giebt also in der That die Bedingung, dass die Geschwindigkeit, mit der sich w ändert, für die angeregte Bewegung viel kleiner ist, als im Falle bemerkbarer Wellenbewegung.

Bezeichnen wir mit y die Entfernung irgend eines Theilchens des Fadens von dessen Ruhelage, so hat man bekanntlich für y die partielle Differentialgleichung:

29) $$\frac{1}{a^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Da für die gesuchte Bewegung nach 28

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

gegen

$$\frac{1}{a}\frac{d^2y}{dx\,dt},$$

und dieses wieder gegen

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

verschwinden muss, so reducirt sich dieselbe angenähert auf:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

was liefert:

$$y = x\varphi(t) + \psi(t),$$

und da für $x = 0$, $y = 0$, für $x = l$ aber y gleich einer vorgeschriebenen Funktion $f(t)$ von t sein muss, so folgt:

$$y = \frac{x}{l}f(t).$$

Da wir hier nur Annäherungsrechnung treiben, so hat es natürlich keine Schwierigkeit, nach bekannten Methoden den Grad der Annäherung weiter zu treiben. Bezeichnet man den gefundenen Werth von y mit y_1, und setzt $y = y_1 + y_2$, so liefert die abermalige Anwendung der Gleichung 29:

30) $$y = \frac{x^3}{6a^2l}f''(t) + x\varphi(t) + \psi(t),$$

wobei φ und ψ jetzt so zu bestimmen sind, dass y_2 für $x = 0$ und $x = l$ verschwindet; es ist also:

$$\psi = 0, \quad \varphi = -\frac{l^2}{6a^2}f''(t).$$

Man würde so eine Reihenentwickelung erhalten, deren Convergenz freilich eine begrenzte ist, welche aber, so lange sie convergirt, natürlich mit der Lösung durch willkürliche Funktionen oder dem allgemeinen Integrale übereinstimmt.

Das Analogon zu dieser Reihenentwickelung bildet im elektromagnetischen Probleme die Berücksichtigung der elektrostatischen Wirkung veränderlicher elektrischer Ströme, der ponderomotorischen Wirkung erlöschender Ringmagnete etc. In der Relation 28 sind die Differentialquotienten einer und derselben Grösse mit einander verglichen. Will man die zweier verschiedener Grössen u und v vergleichen, so muss man bedenken, dass während der Bewegung sich immer lebendige Kraft in Arbeit und umgekehrt umsetzt, also der Zuwachs der lebendigen Kraft und der Arbeit immer von gleicher Grössenordnung sein muss. Die Differentialquotienten dieser Grössen können daher gerade so verglichen werden, wie in der Relation 28 die Differentialquotienten einer einzigen Variabeln w. Um dies zu versinnlichen, betrachten wir wieder eine elastische Schnur AB, deren eines Ende A fix ist, und charakterisiren irgend einen Punkt C der Schnur durch seine Entfernung x von A. Das andere Ende B soll aber jetzt longitudinal in der Richtung der Geraden AC hin- und herbewegt werden. ξ sei die ebenfalls longitudinale Verschiebung des Punktes C gegen B hin, ξ_B deren Werth für $x = l = AB$. Wir könnten diese Aufgabe natürlich gerade so wie die vorige behandeln, wollen aber jetzt die elastische Kraft p auf die Einheit des Querschnittes im Punkte C einführen. Ist E der Elasticitätsmodul, so ist

$$p = E\frac{d\xi}{dx}.$$

Die lebendige Kraft des Fadenstückes von der Länge dx ist:

$$\frac{q\varrho\, dx}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2,$$

wobei ϱ die Dichte der Substanz des Fadens ist. Die Arbeit der elastischen Kräfte in demselben Fadenstücke ist bekanntlich:

$$\frac{q\, dx}{2}E\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2.$$

q ist der Querschnitt des Fadens. Da beide Grössen sich in-

einander umsetzen müssen, wenn Wellenbewegung stattfindet, so müssen ihre Zuwächse von derselben Grössenordnung sein. Setzen wir daher:

$$u = \frac{d\xi}{dt}\sqrt{\frac{\varrho}{E}}, \quad v = \frac{d\xi}{dx},$$

so müssen auch die Zuwächse von u und v von derselben Grössenordnung sein. Für die gegenüber der Wellenbewegung langsame Bewegung muss daher entsprechend den Relationen 28

$$\frac{1}{a}\frac{du}{dt}$$

nicht nur gegen

$$\frac{du}{dx}, \text{ sondern auch gegen } \frac{dv}{dx}$$

verschwinden, ebenso:

31) $$\frac{1}{a}\frac{dv}{dt} \text{ gegen } \frac{du}{dx}.$$

Wir können nun die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\varrho}{E}\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

für die longitudinalen Schwingungen der Schnur in der Form schreiben:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{a}\frac{du}{dt}$$

und bekommen daher für die gesuchte Bewegung angenähert:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0$$

wie früher.

§ 9. Anwendung des vorigen Paragraphen auf Aerodynamik und Elektricitätslehre (Asone, aphote Bewegung).

Die im vorigen Paragraphen angeführten Beispiele erscheinen von fast kindischer Einfachheit; doch sind sie die vollkommenen Analoga zu den Lösungen der Grundgleichungen des Elektromagnetismus, welche wir zunächst zu betrachten haben. Wegen der enormen Fortpflanzungsgeschwindigkeit erzeugen nämlich alle bisher bekannten elektromagnetischen Erregungen bloss Bewegungen des Aethers, welche den eben besprochenen Charakter haben, mit einziger Ausnahme der Licht-

erscheinungen und der von Hertz entdeckten elektrischen Wellen, wo aber auch in Entfernungen von der Erregungsstelle, welche klein gegen die Wellenlänge sind, die Bewegung noch nahezu den Charakter der eben besprochenen hat[1]); ich werde darauf in einem späteren Theile dieser Vorlesungen zurückkommen.

Eine erschöpfende Analyse der Natur der besprochenen Bewegung würde mich viel zu weit führen; dieselbe müsste jedenfalls zur Bedingung 27 für die Anregung noch die weitere hinzufügen, dass dieselbe nicht allzulange mit einer Periode, welche ein exaktes Vielfaches der Schwingungsdauer irgend einer Eigenschwingung des angeregten Körpers ist, gedauert haben darf, da dann, besonders wenn jede Dämpfung ausgeschlossen ist, ein Ausnahmsfall eintritt.

Noch eines Specialfalles will ich im Vorübergehen Erwähnung thun, nämlich der Bewegung eines Gases, in welchem der Druck p auf die Flächeneinheit und die Dichte ϱ durch das Gesetz $p = C\varrho^n$ verknüpft sind. Sind u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten an irgend einer Stelle, so ist

$$\varrho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$$

die lebendige Kraft der Volumeinheit. Die Schallgeschwindigkeit ist:

$$a = \sqrt{n C \varrho^{n-1}}.$$

Die Arbeit in einer Gasmasse, welche bei der Dichte ϱ_0 die Volumeinheit erfüllte, ist:

$$\varrho_0 \int p \, d\frac{1}{\varrho} = \frac{\varrho_0 C}{n-1} \varrho^{n-1} + \text{const.}$$

Es sind also die Zuwächse von

$$\varrho u^2 \text{ und } \frac{\varrho_0 C}{n-1} \varrho^{n-1}$$

von derselben Grössenordnung; daher auch die der Quadratwurzeln dieser Grössen, und wenn man voraussetzt, dass ϱ_0 und ϱ von derselben Grössenordnung sind, auch die von

$$\varrho u \text{ und } \varrho \sqrt{\frac{C}{n-1} \varrho^{n-1}},$$

oder, wenn $n/n-1$ eine endliche Zahl ist, die von ϱu

[1]) Vergl. Hertz, Ausbreitung d. el. Kraft, S. 151; Wied. Ann. Bd. 36, S. 5, 1888.

und $a\varrho$. (Für $n = 1$ muss der Beweis besonders geführt werden, was ich hier bei Seite lasse.) Setzt man daher:

$$a\varrho = k, \quad \varrho u = l, \quad \varrho v = m, \quad \varrho w = n,$$

so sind die Aenderungen dieser Grössen von derselben Grössenordnung. Die Continuitätsgleichung nimmt daher die Form an:

$$\frac{1}{a}\frac{dk}{dt} + \frac{dl}{dx} + \frac{dm}{dy} + \frac{dn}{dz} = 0.$$

Es muss daher nach den früher aufgestellten Principien das erste Glied gegen jedes der übrigen verschwinden, und man hat angenähert:

$$\frac{dl}{dx} + \frac{dm}{dy} + \frac{dn}{dz} = 0.$$

War die Dichte anfangs überall dieselbe, und bewegen sich die Umhüllung und etwa eingetauchte Körper so, dass das Volumen nicht verändert wird, so wird daher die Dichte immer nahezu dieselbe bleiben, und das Gas sich wie eine incompressible Flüssigkeit bewegen. Aendert sich das Volumen, so können auch langsame, aber in der ganzen Gasmasse immer nahezu gleiche Dichtenänderungen vorkommen.[1]) Bei entsprechender Anregung kann die Strömung auch wellenartig sein, z. B. wie die Wellen einer incompressiblen Flüssigkeit. Man muss also sagen: die Bewegung ist langsam bezüglich der Ausbreitung der Schallwellen in dem in Rede stehenden Raume, wofür wir mit einem Worte ason sagen wollen.

Ueberhaupt können derartige Bewegungen auch noch den Charakter von Schwingungen haben; so kommt z. B. den Transversalschwingungen einer gespannten, an beiden Enden befestigten Saite, welche in der Mitte mit einer im Vergleich zu ihrer Masse sehr grossen Masse belastet ist, oder eines Drahtes, welcher, unten mit einem Gegenstande von sehr grossem Trägheitsmomente belastet, Torsionsschwingungen macht etc., ganz der Charakter dieser Bewegungen zu.

Dasselbe gilt auch vom Aether. Wir wollen daher Aetherbewegungen, wobei die Anregung so langsam erfolgt, dass

---

[1]) In den hydrodynamischen Bewegungsgleichungen sind die Veränderungen von ϱu^2 und $p = C\varrho^n$ von derselben Grössenordnung; es können daher die Aenderungen von ϱ, nicht aber die von p vernachlässigt werden. Es bleiben daher die übrigen hydrodynamischen Bewegungsgleichungen unverändert.

Wellen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes oder der Hertz'schen Wellen ausgeschlossen sind, mit einem Worte als aphot bezeichnen, wobei wir freilich unter φῶς nicht bloss die auf die Netzhaut wirkenden Aetherschwingungen, sondern auch die strahlende Wärme und Hertz'schen Schwingungen verstehen. Dabei können noch immer langsamere stehende Schwingungen, z. B. oscillirende Condensatorentladungen, stattfinden, aber die durch sie erregten Hertz'schen Wellen sind in Räumen von den Dimensionen der Laboratorien, ja selbst der Erde, absolut unmessbar.

Wir haben bereits bemerkt, dass abgesehen von den Erscheinungen des Lichtes und der strahlenden Wärme und der Hertz'schen elektrischen Schwingungen alle bekannten Erregungsarten elektromagnetischer Erscheinungen wegen der enormen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen den Bedingungen 27 genügen und daher aphote Aetherbewegungen erzeugen, bei denen die eigentliche Wellennatur des Elektromagnetismus völlig verborgen bleibt.

Um die den Beziehungen 31 analogen für den Aether zu finden, müssen wir bedenken, dass dabei, wenn überhaupt zwischen den Grössen P, Q, R einerseits und α, β, γ andererseits ein bemerkbarer Umsatz stattfindet, das Princip der Erhaltung der Energie gewahrt bleiben muss, also die Zuwächse der in den Gleichungen A und B rechts stehenden Addenden, daher auch die von

$$P\sqrt{D}, \quad Q\sqrt{D}, \quad R\sqrt{D}, \quad \alpha\sqrt{M}, \quad \beta\sqrt{M}, \quad \gamma\sqrt{M}$$

und da D und M endliche Zahlen sind, auch die von P, Q, R, α, β, γ von derselben Grössenordnung sein müssen. Diese Grössen spielen also die Rolle der in der Relation 31 mit u und v bezeichneten Grösse.

Nun ist aber $\mathfrak{V}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen im Luftraume. Entsprechend der Beziehung 31 muss daher in den Gleichungen D die linke Seite gegen die Glieder der rechten zu vernachlässigen sein und man erhält:

$$32)\qquad \frac{dR}{dy} = \frac{dQ}{dz}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy},$$

Findet dagegen kein nennenswerther Umsatz zwischen den Grössen P, Q, R und α, β, γ statt, so müssen eo ipso in den



Gleichungen D die Glieder, welche die ersteren drei Grössen enthalten, separat verschwinden und ebenso die, welche die letzteren enthalten, was wieder zu den Gleichungen 32 führt.

Aus denselben folgt:

33) $$P = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad Q = -\frac{d\varphi}{dy}, \quad R = -\frac{d\varphi}{dz}.$$

Wir brauchen nun nur mehr eine Gleichung zur Bestimmung von φ, und da ist es am besten, die Eliminationsgleichung von α, β, γ aus den Gleichungen C zu benützen, also die Gleichung:

16a) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{d(DP)}{dx} + \frac{d(DQ)}{dy} + \frac{d(DR)}{dz}\right] + \frac{dL(P+X)}{dx} \\ &\qquad + \frac{dL(Q+Y)}{dy} + \frac{dL(R+Z)}{dz} = 0, \end{aligned}\right.$$

welche, da sie ohne jede Vernachlässigung gebildet ist, unter allen Umständen gelten muss. Wir können jetzt aus 16a und 33 die Grössen P, Q, R ganz unabhängig von α, β, γ bestimmen, wozu wir sofort im nächsten Paragraph schreiten wollen.

Wir bemerken hier nur noch, dass für die aphote Bewegung aus demselben Grunde in den Gleichungen C die linke Seite verschwindet. Man erhält daher, wenn L einen sehr grossen Werth hat:

34) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} = \frac{4\pi L}{\mathfrak{V}}(P+X), \quad \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz} = \frac{4\pi L}{\mathfrak{V}}(Q+Y), \\ &\qquad \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = \frac{4\pi L}{\mathfrak{V}}(R+Z). \end{aligned}\right.$$

Ist dagegen L klein, so folgt einfach:

$$\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} = \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz} = \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = 0.$$

Ferner folgt noch, ebenfalls unabhängig von jeder Vernachlässigung, aus D:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d(M\alpha)}{dx} + \frac{d(M\beta)}{dy} + \frac{d(M\gamma)}{dz}\right] = 0.$$

Die Betrachtungen dieses Paragraphen, sowie ähnliche, die wir später noch öfters anstellen werden, sind natür-

lich für denjenigen vollkommen überflüssig, der sich nach Kirchhoff's Vorgang gewöhnt hat, zuerst bloss partikuläre Integrale der allgemeinen Differentialgleichungen hinzuschreiben und erst nachher deren physikalische Interpretation zu suchen. Derselbe ist jedoch im besten Falle nicht reicher als wir, wenn wir nur, nachdem wir uns den physikalischen Grund zu veranschaulichen gesucht haben, warum gerade diese partikulären Lösungen eine so wichtige Rolle spielen, und warum nicht noch andere eine gleich wichtige Rolle spielen, noch jedesmal den Nachweis liefern, dass die gefundenen Werthe auch den exakten Differentialgleichungen ohne jede Vernachlässigung genügen.

Fünfte Vorlesung.

§ 10. Begriff der freien Elektricität.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 33 kann man die Gleichung 15 auch so schreiben:

15a) $$\varepsilon_w = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d}{dx}\left(D\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(D\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(D\frac{d\varphi}{dz}\right)\right].$$

Ferner sind nach den Formeln 22, sobald die Gleichungen 33 erfüllt sind, die Kräfte, welche ausser den äusseren elektromotorischen Kräften, also durch scheinbare Fernwirkung im Bilde auf die Einheit der Elektricität wirken,

$$-d\varphi/dx, \quad -d\varphi/dy, \quad -d\varphi/dz.$$

Es ist also φ das elektrostatische Potential. Es ist in allen elektrischen Maasssystemen üblich, φ so zu messen, dass seine negativen Ableitungen nach den Coordinaten ohne weiteren Faktor die Kräfte auf die Elektricitätseinheit geben. Die Gleichungen 33 gelten daher unverändert in allen Maasssystemen. Wäre in einem anderen Maasssysteme $P_h = h.P$, so müsste auch der im anderen Maasssysteme gemessene Werth des φ, den wir φ_h nennen wollen, gleich $h\varphi$ sein, dagegen ist nach 15h $\varepsilon = h\varepsilon_h$, daher

$$\varphi_h = h^2 \sum \varepsilon_h/\varrho, \qquad \varepsilon_h = -D\Delta\varphi/4\pi h^2$$

Da wir voraussetzen, dass die elektromagnetische Störung in unendlicher Entfernung jedenfalls unmerklich wird, so müssen die Ableitungen von φ nach den Coordinaten im Unendlichen verschwinden, und wir können die zu φ hinzutretende Constante, da sie aus den Gleichungen herausfällt, so wählen, dass auch φ selbst im Unendlichen verschwindet. Wenn man zur identischen Gleichung $d^2 P / d x^2 = d^2 P / d x^2$ die nach z differentiirte zweite und die nach y differentiirte dritte der Gleichungen 32 addirt, so erhält man hierzu noch:

$$\varDelta P = \frac{d}{d x}\left(\frac{d P}{d x} + \frac{d Q}{d y} + \frac{d R}{d z}\right).$$

Da analoge Gleichungen für $\varDelta Q$ und $\varDelta R$ gelten, so sieht man, dass diejenige Funktion φ, deren negative Ableitungen nach den Coordinaten gleich P, Q, R sind, die Potentialfunktion einer Masse sein muss, deren Dichte in einem beliebigen Volumelemente $d\tau$ gleich

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d P}{d x} + \frac{d Q}{d y} + \frac{d R}{d z}\right)$$

ist. Die Potentialtheorie bietet daher ein willkommenes Mittel zur Lösung aller einschlägigen Aufgaben, ein Umstand, der übrigens immer eintritt, sobald gewisse Grössen die partiellen Ableitungen einer Funktion nach den Coordinaten sind (bewegte Flüssigkeit, in der ein sogenanntes Geschwindigkeitspotential existirt etc.).

Trotz der Unbequemlichkeit, welche die Einführung einer willkürlichen Constanten hat, deren Werth natürlich auf das Resultat ohne Einfluss ist, empfiehlt es sich doch, obigen Ausdruck noch mit einer solchen zu multipliciren, also eine Masse zu fingiren, welche den Raum so erfüllt, dass ihre Dichte im Volumelemente $d\tau$ den Werth:

$$\varepsilon_f = \frac{\mathfrak{d}}{4\pi}\left(\frac{d P}{d x} + \frac{d Q}{d y} + \frac{d R}{d z}\right),$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen 32 den Werth:

35) $$\varepsilon_f = -\frac{\mathfrak{d}}{4\pi}\varDelta\varphi$$

hat, wobei $\mathfrak{d}$ eine beliebige, für alle Körper zu allen Zeiten constante Zahl ist. Wer will, kann ja immer $\mathfrak{d} = 1$ gesetzt denken. Es ist dann φ das Potential einer Masse, die den

Raum mit der Dichte $\varepsilon_f/\mathfrak{d}$ erfüllt; d. h. der Werth von φ in irgend einem Punkte A des Raumes (dem Aufpunkte) ist

$$\varphi = \frac{1}{\mathfrak{d}} \int \frac{\varepsilon_f \, d\tau}{\varrho}, \tag{36}$$

wobei $d\tau$ ein Volumelement, ε_f der dort herrschende Werth von

$$\frac{\mathfrak{d}}{4\pi}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\right) = -\frac{\mathfrak{d}}{4\pi} \Delta \varphi$$

und ϱ die Entfernung des Volumelementes vom Aufpunkte ist. Die Integration ist über alle Volumelemente aller elektrisch wirksamen Körper, also, wenn man will, über den gesammten unendlichen Raum zu erstrecken, da ohnedies $\varepsilon_f = 0$ ist, wo sich keine wirksamen Körper befinden. Wir nennen ε_f die Dichte der freien Elektricität an der betreffenden Stelle. Für Luft ist $D = 1$. Setzt man daher, was wir meistens thun werden, $\mathfrak{d} = 1$, so ist für dieses wichtige Dielektricum die freie Elektricität mit der wahren identisch. Für andere Dielektrica dagegen werden wir durch eine besondere Hypothese über das Verhalten derselben (die dielektrische Polarisation) ε_f mit ε_w in eine einfache Beziehung zu bringen suchen, wovon im nächsten Paragraph die Rede sein soll.

Wir können den Begriff der freien Elektricität gerade so wie den der wahren auch in dem vollkommen allgemeinen Falle, dass die Gleichungen 32 nicht gelten, festhalten, indem wir auch dann noch setzen:

$$\varepsilon_f = \frac{\mathfrak{d}}{4\pi}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\right) \tag{37}$$

und dabei immer φ als durch die Gleichung 36 definirt betrachten. Wir können dann P, Q, R in zwei Theile zerlegen, indem wir setzen:

$$P = -\frac{d\varphi}{dx} + P_1, \quad Q = -\frac{d\varphi}{dy} + Q_1, \quad R = -\frac{d\varphi}{dz} + R_1. \tag{38}$$

Da wir P, Q, R als die Componenten der elektrischen Kraft bezeichnen, so können wir

$$-\frac{d\varphi}{dx}, \quad -\frac{d\varphi}{dy}, \quad -\frac{d\varphi}{dz}$$

als die der elektrostatischen, P_1, Q_1, R_1 als die der elektrodynamischen bezeichnen; letztere Grössen werden daher die Bedingung erfüllen:

$$39) \qquad \frac{dP_1}{dx} + \frac{dQ_1}{dy} + \frac{dR_1}{dz} = 0 .$$

Diese Zerlegung wird überall von Vortheil sein, wo sich die Bewegung der aphoten einigermaassen nähert, so dass die der Formel 30 analoge Reihenentwickelung rasch convergirt; für sehr schnelle elektrische Schwingungen, wo diese Reihenentwickelung vielleicht sogar divergirt, wird diese Zerlegung ohne Nutzen sein. $\mathfrak{d}$ ist natürlich nicht etwa eine Naturconstante, sondern eine von uns willkürlich gewählte Zahl, von deren Werth die Resultate ganz unabhängig sind.

Es ist aber bezüglich des Integrals der Formel 36 noch Folgendes zu bemerken. Wir denken uns nach dem Princip der Continuität der Uebergänge die Trennungsfläche zweier Körper immer so beschaffen, als ob sie angesehen werden könnte als eine continuirliche, wenn auch sehr dünne Uebergangsschicht. Wir müssen daher in dem Integrale der Formel 36 auch die sämmtlichen Volumelemente aller Uebergangsschichten mit einbegreifen. In diesen Uebergangsschichten wird sich im Allgemeinen P, Q, R sehr rasch ändern können. Die Volumelemente derselben werden also, obwohl ihre Summe sehr klein ist, doch einen endlichen Betrag zum Integrale 36 beitragen können, und es ist häufig gut, diesen Betrag gesondert von dem, welchen das Innere des Körpers liefert, anzuschreiben.

Wir bezeichnen mit do ein Oberflächenelement einer solchen Uebergangsschicht, und legen zunächst die Abscissenaxe senkrecht zu do. Der Uebergangsschicht selbst schreiben wir eine, wenn auch sehr geringe Dicke δ zu, fassen also das Element do der Uebergangsschicht als einen Cylinder Z von der Basis do und der Höhe δ auf. Die gesammte in diesem Cylinder enthaltene wahre Elektricität bezeichnen wir mit $E_w\, do$ und nennen E_w die Flächendichte der wahren Elektricität.

Wir zerlegen δ noch weiter in unendlich viele, unendlich kleine Elemente, deren eines dx heissen mag. Der Cylinder mit der Basis do und der Höhe dx ist dann ein Volumelement des Cylinders Z. Die im Cylinder von der Höhe dx und der Basis do enthaltene wahre Elektricität ist dann $\mathfrak{e}_w\, do\, dx$. Integriren wir dies über den gesammten Cylinder Z, so erhalten wir

$$E_w\, d o = \int \varepsilon_w\, d o\, d x = \int \left[\frac{d(D P)}{d x} + \frac{d(D Q)}{d y} + \frac{d(D R)}{d z}\right] \frac{d x\, d o}{4\pi}.$$

Behandelt man dieses Integral gerade so, wie die Integrale der Formel 10a, so ergiebt sich dafür der Werth

$$(D_1 P_1 - D_0 P_0)\, d o / 4\pi,$$

wobei mit dem Index 1 die Werthe unmittelbar an der Trennungsschicht, aber auf der der positiven x-Richtung zugewandten Seite, mit dem Index Null aber die Werthe auf der entgegengesetzten Seite bezeichnet werden. Es ist also

$$E_w = \frac{1}{4\pi}(D_1 P_1 - D_0 P_0).$$

Hat die x-Axe eine beliebige Richtung, so ist

$$E_w = \frac{1}{4\pi}(D_1 N_1 - D_0 N_0),$$

wobei N die in Formel 19 definirte Componente des Vektors (P, Q, R) in der Richtung der Normale n zu $d o$ ist. Diese ist von der Seite, für die der Index Null gilt, gegen jene hin zu ziehen, auf die sich der Index 1 bezieht. Gerade so, wie bei der wahren, wollen wir auch bei der freien Elektricität $\int \varepsilon_f\, d\tau$ die gesammte in einem Raume befindliche freie Elektricität nennen. Auch die Flächendichte der freien Elektricität auf dem Flächenelemente $d o$ können wir ganz analog wie bei der wahren Elektricität definiren und finden. Man hat also allgemein:

$$40)\quad \begin{cases} E_w = \dfrac{1}{4\pi}(D_1 N_1 - D_0 N_0) = \dfrac{1}{4\pi}\left(D_0 \dfrac{d\varphi_0}{d n} - D_1 \dfrac{d\varphi_1}{d n}\right), \\ E_f = \dfrac{\mathfrak{d}}{4\pi}(N_1 - N_0) = \dfrac{\mathfrak{d}}{4\pi}\left(\dfrac{d\varphi_0}{d n} - \dfrac{d\varphi_1}{d n}\right). \end{cases}$$

Dabei bezieht sich das letzte Glied jeder Gleichung auf den Fall, wo die Gleichungen 33 gelten, und es drückt $d/d n$ eine Differentiation in der Richtung der im eben definirten Sinne (von Null gegen 1) zu ziehenden Normale aus. Da alle Punkte des Flächenelementes $d o$ vom Aufpunkte nahezu dieselbe Entfernung ϱ haben, so liefert die auf $d o$ befindliche freie Elektricität in das Integrale 36 den Betrag $E_f\, d o / \varrho$. Die Gleichung 16 aber verwandelt sich in

$$41)\quad \begin{cases} \dfrac{d E_w}{d t} = - L_1 (S_1 + N_1) + L_0 (S_0 + N_0), \\ \qquad = L_1 \left(\dfrac{d\varphi_1}{d n} - S_1\right) - L_0 \left(\dfrac{d\varphi_0}{d n} - S_0\right). \end{cases}$$

S ist die in Formel 19 definirte Componente des Vektors X, Y, Z, also der äusseren elektromotorischen Kraft in der Richtung n. Wenn in der betreffenden Trennungsfläche zwei Isolatoren an einander grenzen, und niemals äussere elektromotorische Kräfte gewirkt haben, so gilt natürlich in jedem Volumelemente ihrer sehr kleinen Dicke die Gleichung 16 mit $L = 0$. Wenn daher vor Beginn aller elektrischen Störungen die wahre Elektricität gleich Null war, so wird dies auch für alle spätere Zeiten gelten, und man hat

42) $$D_1 N_1 = D_0 N_0; \qquad D_1 \frac{d\varphi_1}{dn} = D_0 \frac{d\varphi_0}{dn}.$$

Das Integrale der Formel 36 ist nun nicht bloss über alle im Innern der Körper liegenden Volumelemente, sondern auch über alle Volumelemente aller Uebergangsschichten zu erstrecken. Wir wollen, um dies durch ein Zeichen in Erinnerung zu bringen, einem so zu verstehenden Integrale immer den Index U beifügen, einem Integrale aber, welches bloss über Volumelemente zu erstrecken ist, die sich im gewöhnlichen Sinne im Innern von Körpern befinden, den Index J. Dann können wir die Formel 36 in der Form schreiben.

43) $$\varphi = \frac{1}{\mathfrak{d}} \int_U \frac{e_f \, d\tau}{\varrho} = \frac{1}{\mathfrak{d}} \left[\int_J \frac{e_f \, d\tau}{\varrho} + \int \frac{E_f \, do}{\varrho} \right].$$

§11. Dritter Zug des Bildes. Begriff der dielektrischen Polarisation.

Der Begriff der freien Elektricität würde wenig Nutzen bringen, wenn er sich nicht wieder durch eine sehr anschauliche Vorstellung mit dem der wahren verknüpfen liesse, welche also einen neuen Zug unseres Bildes darstellt. Wir denken uns in einem Isolator die neutrale Elektricität zwar unfähig, fortzuströmen, aber fähig, sich in den einzelnen Volumelementen zu verschieben, was wir die dielektrische Verschiebung nennen wollen. Den dadurch hervorgerufenen Zustand der Volumelemente nennen wir deren dielektrische Polarisation.

Betrachten wir ein parallelepipedisches Volumelement, dessen Kanten dx, dy, dz den Coordinatenaxen parallel sind.

Von den beiden zur Abscissenaxe senkrechten Endflächen desselben soll sich in Folge der dielektrischen Verschiebung auf der der positiven Abscissenaxe zugewandten (rechten) Seitenfläche die positive Elektricitätsmenge

$$\frac{D-\mathfrak{d}}{4\pi}\cdot P\,dy\,dz,$$

auf der der negativen Abscissenrichtung zugewandten die gleiche negative Elektricitätsmenge ansammeln. Nach der unitarischen Anschauung würde sich nur auf der rechten Endfläche diese Elektricitätsmenge ansammeln, während auf der vis à vis liegenden ein gleich grosser Mangel entstünde.

Nach Analogie mit dem magnetischen Momente nennt man die Grösse

$$\mathfrak{x}\,dx\,dy\,dz = \frac{D-\mathfrak{d}}{4\pi}P\,dx\,dy\,dz \tag{44}$$

das dielektrische Moment des Volumelementes $dx\,dy\,dz$ in der Abscissenrichtung, $\mathfrak{x}$ aber das dielektrische Moment der Volumeinheit in der Abscissenrichtung.

Dasselbe gilt von der y- und z-Richtung. Die Verschiebungen in den benachbarten Volumelementen werden gefunden, indem man in obigen Ausdrücken $x+dx$, resp. $y+dy$, $z+dz$ statt x,y,z setzt. Daraus findet man in bekannter Weise, dass die dielektrische Verschiebung der neutralen Elektricität zur Folge hat, dass im Volumelemente $dx\,dy\,dz$ der Ueberschuss

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{d}\,dx\,dy\,dz}{4\pi}\left[\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}\right]-\frac{dx\,dy\,dz}{4\pi}\left[\frac{d(DP)}{dx}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{d(DQ)}{dx}+\frac{d(DR)}{dz}\right]=\varepsilon_p\,dx\,dy\,dz \end{aligned}\right. \tag{45}$$

positiver über negative Elektricität entsteht. Wir nennen diesen Ueberschuss die durch die dielektrische Polarisation im Isolator auftretende oder in das Volumelement hineingeschobene Elektricität, ε_p ihre Dichte.

In unserem Bilde müssen wir nun annehmen, dass die gesammte Elektricität in die Ferne wirkt. Da von der nicht verschobenen neutralen Elektricität immer gleich viel positive wie negative vorhanden ist, so ist unter der gesammten Elektricität die Summe der wahren und der durch dielektrische

Polarisation auftretenden zu verstehen, welche Summe wir die freie Elektricität nennen. Ihre Dichte ist also $\varepsilon_f = \varepsilon_w + \varepsilon_p$, wofür wir nach Substitution der Werthe 45 und 15 wieder den Werth 37 finden, so dass also der neue Zug unseres Bildes exakt die Beziehung zwischen der wahren und freien Elektricität darstellt. Unter φ ist daher lediglich das Potential der durch $\mathfrak{d}$ dividirten freien Elektricität zu verstehen.

Die durch dielektrische Polarisation auftretende Elektricität macht eine gleiche, entgegengesetzt bezeichnete Menge der wahren Elektricität unwirksam. Nennt man diese unwirksam gewordene die gebundene Elektricität, so ist ihre Dichte $\varepsilon_g = -\varepsilon_p$.

In unserem Bilde werden wir weiters annehmen, dass die geschilderten dielektrischen Verschiebungen ebenfalls durch die auf die neutrale Elektricität wirkenden Kräfte P, Q, R erzeugt werden. Betrachten wir zuerst den Fall, dass keine äusseren elektromotorischen Kräfte wirken, dann wirkt nach Formel 22 die Kraft P auf die Mengeneinheit der positiven neutralen Elektricität in der positiven Abscissenrichtung. Wir müssen also in unserem Bilde annehmen, dass

46) $$\mathfrak{x} = \frac{D - \mathfrak{d}}{4\pi} P = \varepsilon_{vH} P$$

ist; also dass das dielektrische Moment der Volumeinheit proportional und gleichgerichtet mit der auf die Elektricitätseinheit wirkenden Kraft ist. Wir haben den Proportionalitätsfaktor ε_{vH} genannt, weil v. Helmholtz[1]) denselben mit ε bezeichnet. Stefan[2]) nennt diesen Proportionalitätsfaktor die Elektrisirungsconstante und bezeichnet ihn mit h.

Wir können daher den neuen Zug unseres Bildes dahin vervollständigen, dass wir annehmen, dass diese dielektrische Verschiebung eine der sie erzeugenden Kraft P gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Molekularkraft weckt, welche dieser das Gleichgewicht hält. Die dielektrische Verschiebung schreitet daher immer so weit vor, bis jene Molekularkraft gleich der elektrischen Kraft geworden ist.

---

[1]) Gesamm. Abh. Bd. 1, S. 616.

[2]) Wien. Ber. Bd. 70, S. 634, 1874.

Die nach unserem Bilde zur Dielektrisirung erforderliche Arbeit finden wir wie folgt.

Wächst $\mathfrak{x}$ um $d\mathfrak{x}$, so kann man sich die Sache so denken, als ob die Elektricitätsmenge $+ d\mathfrak{x}\, dy\, dz$ von der einen Endfläche auf die andere des Parallelepipeds verschoben würde, und dadurch auf der anderen die Elektricitätsmenge $- d\mathfrak{x} dy dz$ frei würde. Die erstere Elektricitätsmenge wird also um die Strecke dx verschoben. Auf sie wirkt die elektrische Kraft $P d\mathfrak{x} dy\, dz$; die Arbeit dieser Kraft ist daher

$$P d\mathfrak{x}\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{\varepsilon_{vH}} dx\, dy\, dz\, \mathfrak{x}\, d\mathfrak{x}.$$

Genau gleich ist die Arbeit der Molekularkraft, welche der elektrischen immer das Gleichgewicht hält. Die gesammte molekulare Arbeit also, welche behufs Erzeugung der dielektrischen Polarisation $\mathfrak{x}$ in der Volumeinheit überwunden werden muss, ist in unserem Bilde:

47) $$\frac{\mathfrak{x}^2}{2\,\varepsilon_{vH}} = \frac{\varepsilon_{vH}}{2} P^2 = \frac{P^2}{8\pi}(D - \mathfrak{d}).$$

Es ist aber wohl zu bemerken, dass alle diese Vorstellungen blosse Veranschaulichungen der Resultate sind, die vollständig in den in der ersten Vorlesung abgeleiteten Grundanschauungen und Grundgleichungen enthalten sind und sich daraus mit Nothwendigkeit ergeben. Sie sind also keineswegs neue Annahmen, sondern bloss neue Bilder, durch welche wir uns verschiedene Consequenzen der in der ersten Vorlesung gewonnenen Grundgleichungen versinnlichen.

Es sei hier noch zweierlei bemerkt. Dielektrische Polarisation wurde allerdings in Metallen noch nicht constatirt. Wenn man daher dem D in allen Metallen denselben Werth ertheilte und dann $\mathfrak{d}$ gleich diesem Werthe setzte, so dass in Metallen keine dielektrische Verschiebung der neutralen Elektricität aufträte, so würde man in keinen Widerspruch mit der Erfahrung gerathen. Allein, selbst im Wasser wurde bereits dielektrische Polarisation nachgewiesen, und wenn man auch die Elektricitätsleitung des Wassers, da sie elektrolytischer Natur ist, nicht gelten lassen wollte, so wäre es doch schwer, allen dielektrisch polarisirbaren Körpern jede metallische Leitungsfähigkeit abzusprechen, schon weil dadurch der continuirliche Uebergang von

den Nichtleitern zu den Metallen immer nur durch ein und dasselbe nichtleitende und nicht dielektrisirbare Medium stattfinden müsste. Jedenfalls würde darin eine nicht gerechtfertigte Specialisirung der Maxwell'schen Theorie liegen, welche jeden Augenblick durch das Experiment widerlegt werden könnte.

Man wird also besser thun, sich auch die Metalle der dielektrischen Polarisation fähig zu denken. Es kann dies in zweifacher Weise geschehen. Wir denken uns erstens in denselben nur einerlei neutrale Elektricität und nehmen an, dass jedes Theilchen derselben genau die Summe derjenigen Verschiebungen macht, welche es in Folge der Leitung für sich allein und in Folge der dielektrischen Polarisation für sich allein erfahren würde. Wir können aber auch zweitens in den Leitern zwei Gattungen neutraler Elektricität annehmen, wovon die erste (Strömungselektricität) durch ihr Fortströmen die Erscheinungen der Elektricitätsleitung vermittelt und sich also ganz so verhält, wie wir es in der dritten Vorlesung für die neutrale Elektricität in Leitern gefunden haben, wogegen die zweite (die Verschiebungselektricität) sich ganz so wie die neutrale Elektricität in einem nicht leitenden Dielektricum verhält. Da jede Gattung neutraler Elektricität ursprünglich ein Gemisch von gleich viel positiver und negativer Elektricität ist, so wird sich keine derselben sonst noch irgendwie bemerkbar machen. Wiewohl die zweite Ansicht complicirter als die erste ist, so wollen wir sie doch ihrer grösseren Klarheit wegen adoptiren, da es sich ja ohnedies nicht um etwas Reales, sondern bloss um möglichst klare Bilder zur Versinnlichung der Consequenzen der Grundgleichungen der ersten Vorlesung handelt. Wir erreichen dadurch noch einen Vortheil.

Wir können nämlich im Falle der Wirksamkeit äusserer elektromotorischer Kräfte annehmen, dass diese bloss auf die erste Gattung der neutralen Elektricität, nicht auch auf die zweite wirken, so dass für die dielektrische Polarisation auch bei Wirksamkeit äusserer elektromotorischer Kräfte noch die Formeln 46 und 47 gelten, nicht aber $\mathfrak{x} = \varepsilon_{vH}(P + X)$ ist. Die allerdings natürlichere Annahme, dass die äusseren elektromotorischen Kräfte auch auf die zweite Gattung der neutralen Elektricität wirken, würde in keinem durch die Erfahrung controllirbaren Resultate von der entgegengesetzten abweichen, da ja weder

die scheinbare Fernwirkung der Stellen, wo hydro- oder thermo-elektromotorische Kräfte ihren Sitz haben, noch auch die von Glasstangen im Momente, wo sie gerieben werden, bisher beobachtet wurde. Möglich, dass die Maxwell'sche Theorie einer betreffenden Ergänzung bedarf. Doch hier wollen wir an der letzteren und an der Form, in der wir die Kräfte X, Y, Z einführten, festhalten und das Bild immer so construiren, dass es die Gleichungen der ersten Vorlesung genau wiedergiebt, indem wir annehmen, dass die äusseren elektromotorischen Kräfte auf die zweite Gattung der neutralen Elektricität nicht wirken. Von den hydroelektromotorischen Kräften könnte man z. B. voraussetzen, dass sie ihren Ursprung darin haben, dass durch chemische Wanderung der ponderablen Atome die neutrale Elektricität erster Gattung dislocirt wird, ohne dass dadurch die dielektrische Polarisation irgendwie beeinflusst wird.

Wir werden übrigens auf diesen Gegenstand noch einmal (§ 27 Gleich. 95) zurückkommen und dort auch eine Substitution für X, Y, Z kennen lernen, welche bewirkt, dass die äusseren Kräfte gleichmässig zu

$$\frac{D}{\mathfrak{D}} \frac{dP}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{4\pi L}{\mathfrak{D}} P$$

hinzutreten.

Von grosser Wichtigkeit ist noch folgende Bemerkung. Gemäss den Gleichungen 22 sind in Abwesenheit äusserer elektromotorischer Kräfte die Componenten der Kräfte, welche in unserem Bilde auf die Mengeneinheit der neutralen Elektricität wirken, gleich P, Q, R. Sind die Gleichungen 33 erfüllt, so ist φ deren Potentialfunktion, und da φ nach der Gleichung 36 als das Potential einer Masse von der Dichte $e_f / \mathfrak{d}$ aufgefasst werden kann, so ist diese Kraft dieselbe, als ob jede Menge e_f freier Elektricität auf jede in der Entfernung ϱ befindliche Menge e_n der neutralen Elektricität mit der Kraft

48) $$\frac{e_f e_n}{\mathfrak{d} \varrho^2}$$

wirkte.

Sechste Vorlesung.

§ 12. Elektrostatik.

Den Nutzen der Einführung des Begriffes der freien Elektricität tritt in ein helleres Licht durch Betrachtung specieller Beispiele.

Wir nehmen nun zunächst an, dass früher beliebige äussere elektromotorische Kräfte gewirkt haben, dass deren Wirksamkeit aber zu einer gewissen Zeit aufgehört hat, und betrachten den Zustand, welcher lange Zeit nach dem Aufhören der äusseren elektromotorischen Kräfte zurückgeblieben ist. Da der Zustand jedenfalls aphot geworden ist, so gelten die Gleichungen 33.

Wir wissen, dass nach Formel 8 in der Zeit- und Volumeinheit die Energie $L(P^2 + Q^2 + R^2)$ in Wärme umgesetzt wird. Dieser Umsatz kann nicht ins Unendliche dauern, da sonst unendlich viel Energie vorhanden sein müsste; er muss also nach einiger Zeit aufhören und dann muss überall, wo L nicht gleich Null ist, $P = Q = R = 0$, also φ constant sein. In den Körpern aber, wo $L = 0$ ist (den Isolatoren), ist überhaupt die wahre und neutrale Elektricität festgenagelt, daher kann φ nur Funktion der Coordinaten, nicht der Zeit sein.

Wollte man dies für Isolatoren nochmals aus den Gleichungen beweisen, so würde man sich leicht überzeugen, dass nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie, wenn in den Isolatoren die mit der Zeit unveränderliche Volum- und Flächendichte der wahren Elektricität, auf jedem verbundenen Leitersystem aber der Gesammtbetrag der Elektricität gegeben ist, φ durch die Gleichungen 15a und 40, ferner die Bedingung seiner Constanz in allen Leitern und seines Verschwindens im Unendlichen eindeutig, unabhängig von der Zeit bestimmt ist. Aeussere elektromotorische Kräfte fehlen jetzt noch.

Wie schon bemerkt, wurden unsere Gleichungen durch gewisse Vernachlässigungen gewonnen. Wir haben dadurch den Vortheil erreicht, dass wir auch begreifen, warum sie noch angenähert gelten, sobald beliebige Veränderungen vorgenommen werden, wenn nur die Aenderungsgeschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. Naturgemäss kann aber

die Erlaubtheit derartiger Vernachlässigungen nicht mit voller mathematischer Strenge bewiesen werden. Es sei daher erinnert, dass, wie man sofort sieht, die completen Gleichungen C und D der zweiten Vorlesung, wenn $X = Y = Z = 0$ ist, ohne Vernachlässigung erfüllt sind, sobald

$$P = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad Q = -\frac{d\varphi}{dy}, \quad R = -\frac{d\varphi}{dz}$$

gesetzt wird, und φ eine die Zeit nicht enthaltende, im Unendlichen und in allen Leitern constante, sonst aber beliebige Funktion von x, y, z ist. α, β, γ können dabei entweder gleich Null oder gleich den Ableitungen einer anderen ebenfalls beliebigen von der Zeit unabhängigen Funktion der Coordinaten nach diesen sein.

Man kann also ganz im Sinne der schon einmal besprochenen Kirchhoff'schen Methode zunächst zeigen, dass diese Festsetzungen partikuläre Integrale der allgemeinen Gleichungen sind und dann erst deren physikalische Bedeutung interpretiren. Wird φ als ursprünglich gegeben betrachtet, so bestimmt sich einfach die Dichte der wahren und freien Elektricität an jeder Stelle des Raumes und an jedem Oberflächenelemente der Trennungsfläche zweier Körper nach den Gleichungen 15a, 35 und 40.

In der Praxis ist die Aufgabe gewöhnlich umgekehrt gestellt. Es ist die ursprünglich vorhandene wahre Elektricität gegeben; dann handelt es sich darum, φ so zu wählen, dass in Isolatoren

$$-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d}{dx}\left(D\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(D\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(D\frac{d\varphi}{dz}\right)\right]$$

gleich der gegebenen Dichte der wahren Elektricität, resp., wo solche nicht vorhanden war, gleich Null ist, dass ferner an der Trennungsfläche zweier Isolatoren

$$\frac{1}{4\pi}\left(D_0\frac{d\varphi_0}{dn} - D_1\frac{d\varphi_1}{dn}\right)$$

gleich der dort gegebenen Oberflächendichte der wahren Elektricität (resp. wieder gleich Null), dass endlich für jeden Leiter das über seine ganze Oberfläche erstreckte Integrale

$$\int \frac{do}{4\pi} D \frac{d\varphi}{dn}$$

gleich der gegebenen, auf diesem Leiter sitzenden wahren Elektricitätsmenge ist. Nach dem citirten Lehrsatze der Potentialtheorie ist dieses Problem stets eindeutig lösbar.

Wir denken uns nun zunächst einen einzigen Nichtleiter, in welchem D einen constanten Werth hat, gegeben. In dessen Innerem kann an beliebigen Stellen wahre Elektricität mit der Dichte

$$\varepsilon_w = -\frac{D}{4\pi}\Delta\varphi$$

angehäuft sein. Ausserdem können sich darin beliebige, ebenfalls mit wahrer Elektricität geladene Leiter befinden. Wir betrachten die Zeit, wo φ im Innern derselben constant geworden ist. Ist dann do ein Oberflächenelement eines Leiters, so ist

$$E_w\, do = -\frac{D}{4\pi}\frac{d\varphi}{dn}$$

nach Formel 40 die daselbst angehäufte wahre Elektricität, wobei D und $d\varphi/dn$ die Werthe dieser Grössen unmittelbar an der Oberfläche, aber schon ausserhalb des Leiters (im Isolator) bedeuten. Auch die Normale n ist vom Leiter gegen den Isolator hin zu ziehen. Ebenso findet man die Oberflächendichte der freien Elektricität

$$E_f = -\frac{\mathfrak{d}}{4\pi}\frac{d\varphi}{dn}$$

und für die Volumdichte der freien Elektricität im Innern des Isolators

$$\varepsilon_f = -\frac{\mathfrak{d}}{4\pi}\Delta\varphi.$$

Es ist also

49) $$\varepsilon_f = \frac{\mathfrak{d}}{D}\varepsilon_w, \qquad E_f = \frac{\mathfrak{d}}{D}E_w.$$

Wir wollen nun die ponderomotorischen Kräfte aufsuchen, welche in diesem Falle wirksam sind. Natürlich müssen wir dieselben zunächst aus unserer mechanischen Grundannahme der ersten Vorlesung ableiten. Setzen wir die Werthe 33, 15a, 36 und 37 in die Formel A für die Energie des Mediums ein, integriren das erste Glied partiell nach x, das zweite partiell nach y und das dritte partiell nach z und bedenken, dass wir nach dem Princip der Continuität der Uebergänge die Tren-

nungsflächen nicht gesondert zu betrachten brauchen, sowie, dass im Unendlichen die Ableitungen von φ verschwinden, so folgt

$$50)\quad \begin{cases} T = \dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int D\,d\tau\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\int_U \varphi\,\varepsilon_w\,d\tau \\ \qquad = \dfrac{1}{2\mathfrak{b}}\displaystyle\int_U\int_U \frac{\varepsilon_w\,\varepsilon'_f\,d\tau\,d\tau'}{\varrho}. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten auch, wenn D variabel ist. $d\tau'$ bezeichnet ein anderes Volumelement, ε'_w und ε'_f die Dichten der wahren und freien Elektricität daselbst. Ist D constant, so hat man nach der Gleichung 49

$$51)\quad T = \frac{1}{2D}\int_U\int_U \frac{\varepsilon_w\,\varepsilon'_w\,d\tau\,d\tau'}{\varrho}.$$

Der Index U an den Integralzeichen bedeutet wiederum, dass in die Integration auch die auf Flächen sitzenden Elektricitätsmengen einzubeziehen sind.

Wir wollen nun alle Elektricitätsmengen in zwei Gruppen theilen. Den Volumelementen, in denen Elektricitätsmengen der ersten Gruppe sitzen, sowie den daselbst herrschenden Dichten, fügen wir den Index 1, denen der zweiten Gruppe den Index 2 bei, während wir den Index w weglassen, da wir immer nur von wahrer Elektricität sprechen. Dann wird

$$52)\quad \begin{cases} T = \dfrac{1}{D}\left[\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_U\int_U \frac{d\tau_1\,d\tau'_1\,\varepsilon_1\,\varepsilon'_1}{\varrho} + \frac{1}{2}\int_U\int_U \frac{d\tau_2\,d\tau'_2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2'}{\varrho}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \displaystyle\int_U\int_U \frac{d\tau_1\,d\tau_2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varrho}\right]. \end{cases}$$

Den ersten Addenden rechts nennen wir das Potential der Elektricitäten der ersten Gruppe auf sich selbst, den zweiten Addenden das Selbstpotential der Elektricitäten der zweiten Gruppe, den dritten dagegen bezeichnen wir mit T_{12} und nennen ihn das Potential der Elektricitäten der ersten Gruppe auf die der zweiten. Es soll nun die Lage der Elektricitäten der ersten Gruppe vollkommen fix bleiben, ebenso soll die relative Lage

der Elektricitäten der zweiten Gruppe gegeneinander unverändert bleiben. Nur die relative Lage der Elektricitäten der zweiten Gruppe gegen die der ersten soll sich ändern. Dann ändert sich in Formel 52 rechts nur der dritte Addend, und da wir annahmen, dass ausser der in Joule'sche Wärme verwandelten Arbeit sonst keine Arbeit verloren geht, so muss ein Betrag, welcher gleich der Abnahme dieses Addenden ist, als sichtbare lebendige Kraft oder sichtbare Arbeit ponderomotorischer Kräfte zum Vorschein kommen. Es muss also

53) $$-\delta T_{12} = \frac{1}{D}\delta \int_U \int_U \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \, d\tau_1 \, d\tau_2}{\varrho}$$

die Arbeit der scheinbaren Fernwirkungskräfte sein. Genau dieselbe Arbeit bekommen wir in unserem Bilde, wenn wir annehmen, dass alle in unserem Medium wirkenden elektrischen Kräfte dasselbe Gesammtresultat ergeben, als ob jede in unserem Medium befindliche wahre Elektricität e_w auf jede andere e'_w die Abstossung

54) $$\frac{e_w e'_w}{D \varrho^2}$$

ausüben würde.

Nun sind aber nicht bloss die wahren, sondern auch die durch dielektrische Polarisation entstandenen Elektricitäten vorhanden, und wir müssen consequent annehmen, dass auf jede gegebene wahre Elektricität e_w alle übrige wirkt, deren Summe die gesammte freie Elektricität ist. Um also mit Maxwell's Theorie in Uebereinstimmung zu bleiben, müssen wir annehmen, dass die Gesammtwirkung auf e_w das Resultat der Wirkung aller freien Elektricität auf e_w ist, dass also jede freie Elektricitätsmenge e'_f auf e_w die Abstossung

55) $$\frac{e_w e'_f}{\mathfrak{d} \varrho^2}$$

ausübt. Da aber die freie Elektricität nichts anderes als die Summe aller überhaupt vorhandenen Elektricität ist, so haben wir einfach anzunehmen, dass jede überhaupt vorhandene Elektricität auf jede andere nach diesem Gesetze wirkt.

Der Vergleich dieser Formel mit Formel 48 zeigt, dass wir in unserem Bilde die ponderomotorischen Kräfte erklären

können, indem wir einfach annehmen, dass die freie Elektricität nicht bloss auf die neutrale, sondern nach dem gleichen Gesetze auch auf die wahre Elektricität wirkt. Wir denken uns nun zunächst den realen Standardkörper, z. B. Luft, für welchen $D = 1$ ist. Daselbst ist die zur Beobachtüng gelangende Abstossung zweier wahrer Elektricitätsmengen e_w und e'_w ist nach Formel 54

$$\frac{e_w e'_w}{\varrho^2}.$$

Wir können also das elektrostatische Maass auch als dasjenige definiren, wonach im Standardkörper zwei Elektricitätsmengen Eins in der Distanz Eins die Kraft Eins auf einander ausüben. P, Q, R sind die Componenten der Kraft (Feldstärke), die auf die Elektricitätsmenge Eins wirkt. Ihre Dimensionen sind nach Formel 14

$$m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1}.$$

Da

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d(DP)}{dx} + \frac{d(DQ)}{dy} + \frac{d(DR)}{dz}\right]$$

ist, so sind seine Dimensionen

$$[\varepsilon] = m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{3}{2}} t^{-1}.$$

Die einer elektrostatisch gemessenen Elektricitätsmenge sind

$$[\varepsilon]\, l^3 = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}.$$

Hat in irgend einem anderen Isolator D einen beliebigen Werth, den wir ohne Index schreiben, so ist daselbst die der Beobachtung sich bietende Anziehung der zwei wahren Elektricitätsmengen e_w und e'_w nach Formel 54 gleich

$$\frac{e_w e'_w}{D \varrho^2},$$

also gleich der im realen Standarddielektricum stattfindenden, dividirt durch D, also durch die Dielektricitätsconstante des zweiten Dielektricums relativ gegen das erste.

Im neuen Medium würden die beiden Elektricitätsmengen, welche im realen Standarddielektricum elektrostatisch gemessen gleich $\sqrt{D}$ wären, die Abstossung Eins auf einander ausüben.

Das wäre also die im neuen Dielektricum elektrostatisch gemessene Elektricitätseinheit. Bezeichnet man die Zahl, welche dieselbe Elektricitätsmenge im alten, resp. neuen Standardmedium elektrostatisch gemessen ausdrückt, mit ε, resp. ε_h, so ist also

56) $$\varepsilon = \varepsilon_h \sqrt{D}$$

und man erhält alle Gleichungen, die für das elektrostatische Maass im neuen Standardmedium gelten, indem man in den Formeln zu Schluss des § 7, deren Nummern den Index h tragen, setzt $h = \sqrt{D}$.

§ 13. Annahme, dass $\mathfrak{d}$ klein gegen Eins ist. Bemerkung über dielektrische Fernwirkung.

Am einfachsten wird unser Bild, wenn wir im realen Standardkörper (Luft) $\mathfrak{d} = 1$ setzen, also keine dielektrische Polarisation annehmen. In anderen Körpern ist dann die dielektrische Polarisation gerade so, dass sie deren abweichendes Verhalten gegenüber dem Standardkörper erklärt. Im Standardkörper ist dann auch die Grösse ε_{vH} der Gleichung 46 gleich Null. Die Dielektricitätsconstante eines anderen Körpers hat nach Gleichung 46 den Werth $D = 1 + 4\pi\varepsilon_{vH}$.

Es kann dann auch sein, dass in gewissen Körpern, etwa im Wasserstoff oder im leeren Raume $D < 1$, ε_{vH} negativ, also die dielektrische Polarisation die entgegengesetzte wäre, wie man sich häufig die diamagnetische Polarisation vorstellt. Theils um dies zu vermeiden, hauptsächlich aber aus anderen, später zu besprechenden Gründen hat Herr v. Helmholtz auch die Möglichkeit ins Auge gefasst, dem $\mathfrak{d}$ einen Werth $\mathfrak{d}_i$ zu ertheilen, der klein gegen Eins ist. Wir wollen uns dann ein, wenn auch nicht existirendes, Dielektricum fingiren, in welchem $D = \mathfrak{d}_i$ ist, und dasselbe das ideale Standardmedium nennen.

Natürlich würde dieselbe wahre Elektricitätsmenge, die im realen Standardmedium in elektrostatischem Maass gemessen gleich Eins ist, im idealen, wo die dielektrische Polarisation fehlt, auf eine gleiche in der Distanz Eins befindliche nach Formel 55 nicht die abstossende Kraft Eins, sondern $1/\mathfrak{d}_i$ ausüben. Wir können aber nach Gleichung 56 setzen

$$\varepsilon_w^i = \frac{\varepsilon_w}{\sqrt{\mathfrak{d}_i}},$$

was wir die Dichte der wahren Elektricität, nach dem für das ideale Standardmedium geltenden elektrostatischen Maasse gemessen, nennen. Alle Gleichungen wären sofort in dieses für das ideale Standardmedium geltende elektrostatische Maass transponirt, wenn wir in den mit dem Index h versehenen Gleichungen am Schlusse des § 7 setzen $h = \sqrt{\mathfrak{d}_i}$. Es wäre jetzt im idealen Medium $\varepsilon_f = \varepsilon_w$, $\varepsilon_p = 0$, im realen Standardmedium dagegen $\varepsilon_f = \mathfrak{d}_i \varepsilon_w$, also bereits sehr klein gegen ε_w, ε_p nahe gleich $-\varepsilon_w$.

$1/\mathfrak{d}_i$ könnte man als die Dielektricitätsconstante des realen Standardmediums, bezogen auf das ideale, bezeichnen. Es ist dies derjenige Fall, wo die v. Helmholtz'sche Theorie wieder mit der Maxwell'schen identisch wird. Die letzte Formel v. Helmholtz's (Wiss. Abh. I. pag. 627) gibt in der That für jedes endliche k in dem Grenzfall, wo sie sich Maxwell's Theorie nähert ($\varepsilon_0 = \infty$) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen unendlich gross.

Es ist noch ein wichtiger Umstand zu erwähnen. Setzen wir nun im realen Standardkörper, wo $D = 1$ ist, auch $\mathfrak{d} = 1$, so giebt es daselbst keine dielektrische Polarisation; es muss also die gesammte elektrostatische Energie gleich dem Potentiale der fingirten Fernwirkungskräfte sein, welche die wahren Elektricitäten auf einander ausüben. Da die zwei wahren Elektricitätsmengen e_w und e'_w die durch die Formel 54 definirte Fernwirkung auszuüben scheinen, so ist das Potential aller wahren Elektricität, wenn wir sie in dem für den Standardkörper geltenden elektrostatischen Maasse messen:

$$\frac{1}{2}\iint \frac{\varepsilon_w \varepsilon'_w \, d\tau \, d\tau'}{\varrho},$$

was in der That nach Formel 49 und 50 gleich $\int T d\tau$ ist. Wenn die Entfernung zweier Elektricitätsmengen, die sich abstossen, wirklich zunimmt, und dadurch entweder sichtbare Arbeit geleistet wird, oder lebendige Kraft sichtbarer Bewegung entsteht, so wird nach Maxwell's Theorie Energie des Mediums in sichtbare Energie umgesetzt. Nach unserem

Bilde dagegen nimmt das Selbstpotential aller vorhandenen Elektricitäten, die, weil wir $\mathfrak{d} = 1$ haben, nur wahre sein können, genau um ebensoviel ab, als die sichtbare lebendige Kraft zunimmt.

Ertheilen wir aber im realen Standardkörper, wo $D = 1$ ist, dem $\mathfrak{d}$ einen anderen Werth, so ist der Unterschied zwischen wahrer und freier Elektricität zu machen. Das Selbstpotentiale aller vorhandenen Elektricitäten ist nichts anderes, als das der freien Elektricitäten auf einander, da die freie Elektricität der Inbegriff der wahren und der durch dielektrische Polarisation entstandenen ist.

Zu den Ursachen, warum wir uns für die dualistische Anschauung entschieden haben, gehört der Umstand, dass dies nach derselben unmittelbar klar ist, da ja dann die unverschobene neutrale Elektricität schon dadurch ausgeschlossen ist, dass davon in jedem Punkte gleich viel positive und negative vorhanden ist, während man nach der unitarischen Anschauung die Wirkung der ponderablen Materie zu Hilfe nehmen müsste. Das Selbstpotentiale der freien Elektricität aber ist unter Beibehaltung desselben Maasssystemes (vergl. Gleichung 49):

$$\frac{1}{2}\iint \frac{\varepsilon_f \, \varepsilon'_f}{\varrho} \, d\tau \, d\tau' = \frac{\mathfrak{d}}{2} \int \varphi \, \varepsilon_w \, d\tau ;$$

dies ist, da φ und ε_w nicht von der Wahl des $\mathfrak{d}$ abhängen, gleich der $\mathfrak{d}$-fachen elektrostatischen Energie $\int T d\tau$. Wird von dieser eine gewisse Menge K in sichtbare lebendige Kraft verwandelt, so nimmt das Selbstpotential aller Elektricität bloss um $K.\mathfrak{d}$ ab. Die noch fehlende Arbeit $(1 - \mathfrak{d})\, K$ wird durch die Kräfte molekularer Natur geleistet, welche sich der dielektrischen Polarisation im Isolator entgegenstellen, da sich $\int d\tau (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)$ bei positivem K vermindert. In der That ist die Arbeit dieser Molekularkräfte nach Formel 47, wenn man vom vollkommen unelektrischen Zustande ausgeht, gleich

$$\int \frac{1 - \mathfrak{d}}{8\pi} d\tau (P^2 + Q^2 + R^2) = (1 - \mathfrak{d}) \int T d\tau .$$

Diese noch fehlende Energie war also, wie nach der Maxwell'schen Theorie, schon vordem als Energie im Isolator vor-

handen. Ist $\mathfrak{b}$ sehr klein gegen die Einheit, so nähert man sich dem Falle, dass alle sichtbar auftretende Energie dem Isolator entnommen wird.

Eine weitere Bemerkung ist die folgende. Wenn $\mathfrak{b}$ verschwindend klein ist, so verschwindet die freie Elektricität, deren Dichte

$$\frac{\mathfrak{b}}{4\pi}\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}\right)$$

ist, und die wahre ist nahe gleich der durch dielektrische Polarisation erzeugten. Wenn wir mit Rücksicht hierauf die Gleichung 16 in der Form schreiben:

$$-\frac{d\tau}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{d(DP)}{dx}+\frac{d(DQ)}{dy}+\frac{d(DR)}{dz}\right]$$
$$=d\tau\left[\frac{dL(P+X)}{dx}+\frac{dL(Q+Y)}{dy}+\frac{dL(R+Z)}{dz}\right],$$

so liefert also ihre linke Seite nach Formel 45 die Vermehrung der Elektricität im Volumelemente $d\tau$ durch Aenderung der dielektrischen Polarisation, die rechte die durch Leitung aus diesem Volumelemente weggeführte Elektricität. Ihre Summe ist gleich Null.

Es wird also aus jedem Volumelemente genau soviel Elektricität durch Leitung weggeführt, als durch dielektrische Polarisation daselbst hingeschoben wird.

Die wahre Elektricität kommt also nur dadurch zu Stande, dass an gewisse Stellen durch Leitung neutrale Elektricität erster Gattung, welche wir Strömungselektricität nannten, hingeführt wird. Daselbst muss dann durch dielektrische Verschiebung ein gleiches Quantum von neutraler Elektricität zweiter Gattung (Verschiebungselektricität) entfernt werden. Selbstverständlich muss dafür an anderen Stellen ein gleiches Quantum neutraler Strömungselektricität durch Leitung weggeführt werden, und an seine Stelle ein wieder gleiches Quantum neutraler Verschiebungselektricität durch dielektrische Polarisation treten.

Wenn wir also $\mathfrak{b}$ klein annehmen, so verhalten sich die Strömungs- und Verschiebungselektricität wie zwei incompressible, sich gegenseitig verdrängende Flüssigkeiten, was besonders Poincaré ausführlich bespricht. Doch würde man Maxwell natürlich missverstehen, wenn man ihm den Glauben an der

Realität dieser beiden Flüssigkeiten imputirte; derselbe steht ihm ebenso ferne, wie der Glaube, dass die Kraftlinien reale Zwirnfäden seien. In seiner ersten Theorie verwendet Maxwell auch ein ganz anderes Bild, das Gordon später weiter entwickelte. Letzterer stellte die wahre Elektricität durch das Zusammenrücken von Kugeln dar, die sich auf einer unausdehnsamen Schnur verschieben.

Es darf übrigens nicht verschwiegen werden, dass man im Bilde $\mathfrak{b}$ nicht exakt gleich Null setzen darf, weil man sonst gar keine freie Elektricität bekäme.

Wir werden später sehen, dass gerade in diesem Falle, wo $\mathfrak{b}$ klein gegen 1 ist, das Bild auch für die Hertz'schen Schwingungen noch mit den Consequenzen der Gleichungen, welche wir in der ersten Vorlesung entwickelten, übereinstimmt, was für andere Werthe von $\mathfrak{b}$ nicht der Fall ist. Eine genaue quantitative Messung dieser Erscheinungen würde also für denjenigen, der sich nicht von vornherein auf den Standpunkt der Maxwell'schen Theorie stellt, ein Mittel geben, den Werth von $\mathfrak{b}$ zu messen, resp. experimentell zu beweisen, dass er sehr klein angenommen werden muss, um auch die Erscheinungen der Elektrodynamik richtig wiederzugeben. Ein gewisser Beweis hierfür liegt übrigens schon in der Uebereinstimmung der elektrostatisch und der aus elektrischen Wellen gemessenen Dielektricitätsconstante. (Vgl. hierüber § 28.)

Wir betrachteten bisher nur immer die Erscheinungen in einem einzigen bestimmten Dielektricum. Sind mehrere Dielektrica mit verschiedenen Dielektricitätsconstanten gleichzeitig vorhanden, oder variirt D von Punkt zu Punkt, so kommen zu den im Vorhergehenden beobachteten Kräften auch noch die bisher wenig studirten Kräfte hinzu, welche ich einmal dielektrische Fernwirkungskräfte genannt habe. Sie äussern sich, wie Maxwell (allerdings von den entsprechenden magnetischen Kräften) gezeigt hat, dadurch, dass die Körper von grösserer Dielektricitätsconstante nach Stellen grösserer Feldstärken getrieben werden. In unserem Bilde sind es die Kräfte, welche von der freien Elektricität auf die durch dielektrische Polarisation auftretende ausgeübt werden.

Wir nahmen bisher mit Herrn v. Helmholtz an, dass die Kraft, welche auf einen Körper wirkt, gleich ist derjenigen,

welche auf die im Körper selbst vorhandene wahre Elektricität ausgeübt wird, unbeeinflusst durch die dielektrische Polarisation des umgebenden Mediums, was dieser mit folgenden Worten motivirt[1]):

„Für die Verschiebungen von E im Raume S, soweit ε constant ist, bildet diese neutralisirende Elektricität kein Hinderniss, weil sie überall mitfolgen kann. Die Anziehungskräfte also, welche von anderweitig vorhandenen elektrischen Massen auf E ausgeübt werden, müssen ebenso gross sein, als wenn die E theilweise neutralisirende Elektricität gar nicht vorhanden wäre.“

Es könnte jedoch die Wirkung auf jene neutralisirende Elektricität im umgebenden Medium Druckkräfte erzeugen, welche nach dem archimedischen Principe indirekt bewegend auf den Körper wirkten, wie ja in der That ein dielektrisch polarisirter Körper in einer ebenso polarisirten Flüssigkeit einen Auftrieb erfährt. Aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft folgt freilich, dass dieselben auf das bisher Vorgetragene ohne Einfluss sind; dagegen kommen sie bei der dielektrischen Fernwirkung sicher in Frage. Ein vollkommen klarer Einblick in diese Erscheinungen kann erst bei Betrachtung der Erscheinungen der sogenannten Elektrostriktion gewonnen werden, die wir für eine viel spätere Zeit aufsparen. Da aber auch die Druckkräfte der Elektrostriktion bisher nicht direkt aus den mechanischen Eigenschaften der Medien, sondern nur aus dem Principe der Erhaltung der lebendigen Kraft abgeleitet werden konnten, so ist dieses Princip auch hier die eigentliche Quelle aller unserer Schlussfolgerungen.

Wäre der Körper, in dem sich die beiden Elektricitätsmengen befinden, ein fester, so könnten bewegende Kräfte nur beobachtet werden, wenn man um diejenige Elektricitätsmenge, auf welche gewirkt wird, ein kleines Loch in den Körper macht; sobald dann dieses Loch mit einer tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeit gefüllt wird, ist deren Dielektricitätsconstante nur dann ohne Einfluss, wenn das Loch die Gestalt eines Cylinders hat, dessen Ausdehnung in der Richtung der Kraft gross gegenüber seinen Querdimensionen ist. (Bezüglich des Beweises vergl.

---

[1]) v. Helmholtz, Gesamm. Abh. Bd. I, S. 614.

§ 19.) Dann ist also die Kraft dieselbe, wie in dem Falle, wo der umgebende Körper flüssig ist und wo kein weiteres Loch erforderlich ist, als das in Folge der Verdrängung der Flüssigkeit durch den eingetauchten Körper entstehende. Letzteres ergiebt sich, indem man das Loch zuerst mit einer Flüssigkeit anfüllt, welche dieselbe Dielektricitätsconstante wie der feste Körper hat und dann diesen auch verflüssigt, wodurch seine elektrischen und magnetischen Wirkungen nicht geändert werden.

Siebente Vorlesung.

§ 14. Betrachtung mit der Zeit unveränderlicher äusserer elektromotorischer Kräfte.

Wir betrachteten bisher den Fall, dass zur Zeit, welche wir ins Auge fassen, die äusseren elektromotorischen Kräfte zu wirken aufgehört haben, und daher $X = Y = Z = 0$ ist. Wir sahen dann, dass der gesammte übrig bleibende Zustand sich einer Grenze nähern muss, für welche in Leitern $P = Q = R = 0$ ist. Diesen bisher betrachteten Grenzzustand nannten wir den des elektrostatischen Gleichgewichtes.

Nun gehen wir zu dem Falle über, dass zwar zur betrachteten Zeit die äusseren elektromotorischen Kräfte nicht verschwinden, wohl aber schon lange von der Zeit unabhängige Werthe hatten, dass also X, Y, Z nur Funktionen der Coordinaten, nicht der Zeit sind.

In Isolatoren sind die äusseren elektromotorischen Kräfte diejenigen, welche an deren Oberfläche die Reibungselektricität hervorrufen; auch die Kräfte, welche Pyro- und Piëzoelektricität erzeugen, gehören vermuthlich hierher. Da die Vorgänge, während deren diese Elektricitätsarten erregt werden, vollkommen dunkel sind, so wollen wir uns hier mit ihnen gar nicht befassen, sondern lediglich die Wirksamkeit der äusseren elektromotorischen Kräfte in den Leitern betrachten. In den Isolatoren soll daher nach wie vor $X = Y = Z = 0$ sein.

Wir denken uns einen beliebigen Anfangszustand gegeben, wobei jedoch die Licht- oder Hertz'schen Wellen, die sich mit

einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit von derselben Grössenordnung wie das Licht ausbreiten, schon abgelaufen sein sollen. An Stelle der Gleichungen D treten dann die Gleichungen 33.

Wir betrachten nun beliebige für $t = 0$ geltende Anfangsbedingungen, die wir kurz die Anfangsbedingungen A nennen wollen. Wenn dieselben erfüllt sind, soll nach Verlauf der Zeit t sein:

$$P = P(t), \quad Q = Q(t), \quad \alpha = \alpha(t) \text{ etc.}$$

Zu Anfang der Zeit war also:

$$P = P(o), \quad Q = Q(o), \quad \alpha = \alpha(o) \text{ etc.}$$

Letztere Gleichungen stellen also die Anfangsbedingungen A dar. Natürlich sind auch alle Grössen Funktionen der Coordinaten, was wir aber nicht besonders zum Ausdruck bringen wollen. Bezeichnen wir mit t_1 irgend eine positive Grösse, so ist für $t = t_1$:

$$P = P(t_1), \quad Q = Q(t_1), \quad \alpha = \alpha(t_1) \text{ etc.}$$

Wir könnten die letzteren Gleichungen auch als Anfangsbedingungen auffassen (die Anfangsbedingungen B). Dann wäre nach Verlauf der Zeit t:

$$P = P(t + t_1), \quad Q = Q(t + t_1), \quad \alpha = \alpha(t + t_1) \text{ etc.}$$

Da alle unsere Differentialgleichungen linear sind, so müssen die Differenzen:

$$P(t + t_1) - P(t), \quad Q(t + t_1) - Q(t), \quad R(t + t_1) - R(t) \text{ etc.}$$

den Differentialgleichungen genügen, wenn darin $X = Y = Z = 0$ gesetzt wird. Sie stellen also die Lösungen dieser Differentialgleichungen für diesen Fall dar, wenn zudem die Anfangswerthe gleich der Differenz der von den Bedingungen B und A geforderten Werthe sind. Für diesen Fall wurde aber bereits bewiesen, dass nach Verlauf einer sehr langen Zeit in allen Leitern $P = Q = R = 0$ sein muss. Es muss also jetzt in den Leitern für grosse Werthe von t die Gleichung bestehen:

$$P(t + t_1) - P(t) = 0.$$

Aehnliches gilt natürlich von Q und R. Da diese Gleichung, sobald nur t gross ist für jeden Werth von t_1, gelten muss, so folgt, dass in Leitern P und natürlich ebenso Q und R nach Verlauf einer langen Zeit von der Zeit unabhängig, also constant werden müssen. Wir nennen den hierdurch bedingten Zustand den der stationären Strömung.

Der einzige Unterschied zwischen den elektrostatischen Erscheinungen und denen der stationären Strömung besteht also darin, dass im ersteren Falle in den Leitern $P = Q = R = 0$ ist, im letzteren dagegen diese Grössen bloss von der Zeit unabhängig zu sein brauchen. Gemäss den Gleichungen 33 müssen daher auch die Ableitungen von φ nach den Coordinaten von der Zeit unabhängig sein. Für die Isolatoren folgt nach wie vor aus der Gleichung 16, dass ε_w von der Zeit unabhängig ist. Aus der Gleichung 15 folgt, da D, P, Q, R nicht Funktionen der Zeit sind, auch für Leiter, dass ε_w von der Zeit unabhängig sein muss, und da wir Oberflächenelemente nur als Volumelemente, sei es von Leitern oder Nichtleitern, betrachten, folgt dies auch für E_w.

Will man die Gleichung 15, weil D für Leiter zweifelhaft ist, nicht verwenden, so folgt für Leiter und an der Grenze eines Leiters und Nichtleiters aus 16 und 41 jedenfalls, dass

$$\frac{d\varepsilon_w}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dE_w}{dt}$$

von der Zeit unabhängig sind. Sollen daher ε_w und E_w sich nicht ins Unendliche im gleichen Sinne ändern, was schliesslich zu unendlicher tonischer Bewegung, also zu unendlicher Energieerzeugung führen würde, so folgt wieder

$$\frac{d\varepsilon_w}{dt} = \frac{dE_w}{dt} = 0,$$

also:

57) $$\frac{dL(P+X)}{dx} + \frac{dL(Q+Y)}{dy} + \frac{dL(R+Z)}{dz} = 0.$$

Dieselbe Gleichung hätte man direkt durch Differentiation der ersten der Gleichungen 34 nach x, der zweiten nach y und der dritten nach z und nachherige Addition der so erhaltenen Gleichungen gewinnen können.

Führt man φ ein, so folgt:

58) $$\frac{dL\left(\frac{d\varphi}{dx} - X\right)}{dx} + \frac{dL\left(\frac{d\varphi}{dy} - Y\right)}{dy} + \frac{dL\left(\frac{d\varphi}{dz} - Z\right)}{dz} = 0,$$

und für die Trennungsfläche zweier Leiter:

59) $$L_1\left(\frac{d\varphi_1}{dn} - S_1\right) = L_0\left(\frac{d\varphi_0}{dn} - S_0\right),$$

wo wieder S die Componente des Vektors (X, Y, Z) in der Richtung der Normalen n ist. Wenn in der Trennungsfläche selbst keine elektromotorische Kraft thätig ist, so reducirt sich dies auf:

60) $$L_1 \frac{d\varphi_1}{dn} = L_0 \frac{d\varphi_0}{dn}.$$

Scheidet die Trennungsfläche einen Isolator von einem Leiter, so erhalten wir für den Isolator $L = S = 0$, und daher für den Leiter unter Weglassung des Index:

61) $$\frac{d\varphi}{dn} - S = 0,$$

oder wenn auch S verschwindet:

62) $$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Im Innern von Nichtleitern ist φ durch dieselbe Gleichung:

15a) $$\varepsilon_w = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d\left(D\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(D\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(D\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz}\right],$$

die wir schon in der Elektrostatik hatten, und an der Grenze zweier Nichtleiter durch die Gleichung:

40) $$E_w = \frac{1}{4\pi}\left(D_0 \frac{d\varphi_0}{dn} - D_1 \frac{d\varphi_1}{dn}\right)$$

bestimmt, wo ε_w und E_w die unveränderlich gegebenen Mengen wahrer Elektricität, oder wo solche fehlt, gleich Null sind. An der Grenze eines Leiters und Nichtleiters ist

$$E_w = -\frac{1}{4\pi} D_1 \frac{d\varphi_1}{dn}.$$

$\int E_w \, do$ ist die gesammte Elektricität auf dem Leiter. Die Normale geht vom Leiter gegen den Isolator.

Endlich kann φ selbst an der Trennungsfläche keinen Sprung machen, da ja sonst seine Ableitungen nach den Coordinaten, also die tonischen Bewegungen, unendlich würden. Nur wenn an der Trennungsfläche die äusseren elektromotorischen Kräfte X, Y, Z selbst unendlich würden, könnte dies der Fall sein. Es wird dieser Fall in der Theorie häufig angenommen, nämlich jedesmal, wenn man an der Berührungsstelle zweier Körper eine sogenannte constante Potentialdifferenz voraussetzt. Wir betrachten eine solche aber immer als Grenze des

Falles, dass in einer sehr dünnen Schicht sehr grosse elektromotorische Kräfte existiren, wovon sogleich auf der nächsten Seite die Rede sein soll, und setzen daher vorläufig überall Continuität von φ voraus. Darüber, dass durch die Gleichung 58 und die darauf folgenden Gleichungen und Continuitätsbedingungen φ eindeutig bestimmt ist, vergleiche Riemann's Vorlesungen über Schwere, Elektr. und Magn. (bearb. von Hattendorf, S. 57 und 58), welcher genau dieselben Gleichungen gewinnt, nur dass er das, was wir als blosses Bild betrachteten, zur materiellen Grundlage ihrer Ableitung benutzt.

§ 15. Specialisirung des im vorigen Paragraph betrachteten Falles.

Wir betrachten einen speciellen Fall; es sei erstens ein beliebiges zusammenhängendes System $\mathfrak{S}$ von Leitern gegeben, in denen beliebige äussere elektromotorische Kräfte wirken, die aber nicht mit der Zeit veränderlich sind. Ein zweites beliebiges System verbundener Leiter $\mathfrak{S}_A$, in dem aber keine äusseren elektromotorischen Kräfte thätig sind, werde in gewissen Punkten mit dem Systeme $\mathfrak{S}$ in Berührung gebracht. Für das zweite System muss nach Gleichung 58 und 62 im Innern überall

$$\frac{d\left(L\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(L\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(L\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz}=0$$

und für dessen Oberfläche

$$\frac{d\varphi}{dn}=0$$

sein.

Wenn zufällig an allen Berührungspunkten im Systeme $\mathfrak{S}$ schon vor der Berührung φ denselben Werth c hatte, so genügt man diesen Gleichungen, indem man im System $\mathfrak{S}_A$ überall setzt $\varphi = c$, und es ist dies nach dem citirten Satze Riemann's auch die einzig mögliche Lösung, abgesehen von einer zu φ hinzutretenden in beiden Körpern gleichen Constanten.

Ein specieller Fall ist der, dass nur ein Berührungspunkt existirt; die Lösung für das System $\mathfrak{S}_A$ ist dann immer $\varphi = c$, gleich dem Werthe des φ im Berührungspunkte.

Ganz anders würde sich die Sache gestalten, wenn $\mathfrak{S}_A$ das System $\mathfrak{S}$ in mehreren Punkten berührte, in denen verschiedene Werthe von φ herrschten. Dann müssten elektrische Ströme im Systeme $\mathfrak{S}_A$ entstehen.

Betrachten wir ein anderes Beispiel: unter $\mathfrak{S}$ verstehen wir ein System von derselben Beschaffenheit wie früher; zwei Punkte A und B desselben sollen mit je einem anderen Leitersystem $\mathfrak{S}_A$, resp. $\mathfrak{S}_B$ in Verbindung stehen, welche letztere beide ohne äussere elektromotorische Kräfte sind. Ist das System $\mathfrak{S}_A$ im Uebrigen vollkommen isolirt, ebenso $\mathfrak{S}_B$, und stehen auch $\mathfrak{S}_A$ und $\mathfrak{S}_B$ nicht miteinander in leitender Verbindung, so erfüllt man die Bedingungsgleichungen für das vereinte System $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}_A\,\mathfrak{S}_B$, indem man der Funktion φ im ganzen Innern von $\mathfrak{S}_A$ den Werth φ_A, ebenso im ganzen Innern von $\mathfrak{S}_B$ den constanten Werth φ_B beilegt, wobei φ_A und φ_B die Werthe von φ sind, die vor der Berührung in A, resp. B herrschten. Zu φ selbst kann natürlich eine additive Constante, welche für alle drei Systeme denselben Werth hat, hinzutreten. Die Differenz $\varphi_B - \varphi_A$ ist aber durch die Beschaffenheit des Systems $\mathfrak{S}$, der daselbst herrschenden äusseren elektromotorischen Kräfte, und die Lage der Berührungspunkte A und B vollkommen bestimmt, und von der Gestalt und Beschaffenheit der $\mathfrak{S}_A$ und $\mathfrak{S}_B$ unabhängig.

Es ist dies der bekannte Fall, dass zwei Leiter mit den Polen einer galvanischen Batterie verbunden werden; sie erhalten dadurch eine gegebene Potentialdifferenz. Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass dasselbe auch gilt, wenn die Berührung zwischen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_A$ in vielen Punkten A_1, A_2 ...... stattfindet, wenn nur in allen diesen Punkten auf $\mathfrak{S}$ schon vor der Berührung gleiches Potential herrschte. Dasselbe gilt auch für $\mathfrak{S}_B$. Falls eine durch directe Berührung zweier Leiter erzeugte constante Potentialdifferenz überhaupt angenommen wird, wollen wir uns dieselbe immer so denken, als ob zwischen denselben eine, wenn auch nur sehr dünne leitende Schicht von der Beschaffenheit des soeben mit $\mathfrak{S}$ bezeichneten Leiters vorhanden wäre. Wäre eine solche Schicht zwischen den früher mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_A$ bezeichneten Leitern enthalten, so wäre sie einfach zu $\mathfrak{S}$ hinzuzurechnen. Wir können daher diesen Fall immer auf den früher discutirten zurückführen.

Wir haben hiermit erst die Gleichungen für dasjenige Problem gefunden, welches man als das allgemeinste Problem der Elektrostatik zu bezeichnen pflegt. Dieses bezieht sich auf den folgenden Fall (I):

Es sind beliebige Systeme von Leitern gegeben, die in beliebige Isolatoren beliebig eingebettet sind. In den Isolatoren können gegebene wahre Elektricitäten vorhanden sein. Gewisse Leiter können mit solchen verbunden sein, in denen mit der Zeit unveränderliche äussere elektromotorische Kräfte herrschen, und die wir wieder $\mathfrak{S}$ nennen wollen. Doch sollen dadurch nie zwei Punkte eines Leiters $\mathfrak{S}$, in denen verschiedene Werthe von φ herrschten, zum zweiten Mal leitend verbunden werden. Es ist dabei sogar der Fall nicht ausgeschlossen, dass im Innern eines Leiters $\mathfrak{S}$ elektrische Ströme vorhanden sind, was immer eintritt, wenn darin X, Y, Z nicht die partiellen Differentialquotienten einer eindeutigen Funktion der Coordinaten sind.

In der landläufigen Elektrostatik wird der Leiter $\mathfrak{S}$ alsdann von der Betrachtung durch die Annahme ausgeschlossen, dass er so klein oder so entfernt ist, dass, abgesehen von der durch ihn erzeugten constanten Potentialdifferenz, die Zustände in seinem Innern und an seiner Oberfläche von keinem Einflusse sind.

Diese Potentialdifferenz $\varphi_B - \varphi_A$ heisst die elektromotorische Kraft jenes Leiters $\mathfrak{S}$ zwischen den Punkten A und B. Für jedes System in Berührung stehender Leiter muss natürlich noch die Gesammtmenge der wahren Elektricität gegeben sein, welche sich von Anfang an darauf befand, und welche mit der freien Elektricität zusammenfällt, sobald nur ein Dielektricum vorhanden ist, in welchem $D = \mathfrak{d} = 1$ gesetzt wird.

Der Fall (I) umfasst auch den speciellen Fall, dass gewisse Leiter durch dünne leitende Fäden ohne äussere elektromotorische Kräfte mit einem ursprünglich unelektrischen Leiter verbunden sind, der entweder sehr gross und sehr entfernt ist, oder alle im Problem in Frage kommenden Körper umhüllt. In allen diesen Leitern muss dann φ denselben Werth wie in dem grossen haben, welcher gleich Null angenommen werden kann. Enthält der dünne leitende Faden äussere elektro-

motorische Kräfte, so unterscheidet sich φ durch einen constanten Werth von dem Werthe des φ im grossen Leiter.

Sind die Bedingungen des Falles (I) nicht realisirt, so haben wir stationäre Strömung. Doch wurde der allgemeinste Fall, dass in einem beliebig gestalteten Leiter beliebige äussere elektromotorische Kräfte wirken, kaum untersucht. Man beschränkt sich auf gewisse Specialfälle, die in der Praxis meist angenähert realisirt sind.

Hierher gehört zunächst der Fall, dass zwei Punkte von verschiedenem elektrostatischen Potentiale A und B eines Leiters $\mathfrak{S}$, in welchem äussere elektromotorische Kräfte thätig sind, noch durch einen anderen Leiter $\mathfrak{S}'$ leitend verbunden sind, in dem solche fehlen. Das elektrostatische Potential im Punkte A können wir für beide Leiter immer gleich Null setzen. So lange sie sich nicht berühren, soll das elektrostatische Potential im ersten Leiter den Werth χ, im Punkte B desselben den Werth $\chi_B = a$ haben, was wir die elektromotorische Kraft desselben zwischen A und B nennen können.

Ferner sei ψ' diejenige Function, welche durch die Bedingungen bestimmt ist, dass im ganzen Innern des Leiters $\mathfrak{S}'$ die Gleichung $\Delta\psi' = 0$, oder wenn L veränderlich ist,

$$\frac{d\left(L\frac{d\psi'}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(L\frac{d\psi'}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(L\frac{d\psi'}{dz}\right)}{dz} = 0,$$

und an seiner ganzen Oberfläche, mit Ausnahme zweier unendlich kleiner, die Punkte A und B umgebender Gebiete die Gleichung

$$\frac{d\psi'}{dn} = 0,$$

erfüllt ist; endlich, dass ψ'_A (der Werth des ψ' im Punkte A) gleich Null, dagegen ψ'_B gleich Eins ist. ψ sei eine Function, welche dieselben Bedingungen für den Leiter $\mathfrak{S}$ erfüllt. Sobald sich die Leiter berühren, genügt man dann allen Bedingungen, wenn man im Leiter $\mathfrak{S}$ setzt: $\varphi = \chi - \vartheta\psi$, im Leiter $\mathfrak{S}'$ aber $\varphi = \vartheta'\psi'$, wobei ϑ und ϑ' noch zu bestimmende Constanten sind. Die Gesammtmenge der neutralen Elektricität, sowohl der positiven, welche in der einen, als auch der negativen, welche in der anderen Richtung in der Zeiteinheit durch irgend einen Querschnitt des Leiters $\mathfrak{S}$ oder

𝔖′ fliesst, ist für jeden Querschnitt dieselbe, da ja unseren Gleichungen gemäss die neutrale Elektricität wie eine incompressible Flüssigkeit strömt. Wenn wir den der Richtung der Normalen n entgegengesetzten Strom als positiv zählen, so hat diese Gesammtmenge nach Formel 20 den Werth:

$$i = \vartheta' \int L \frac{d\psi'}{dn} do,$$

über alle Flächenelemente irgend eines Querschnittes des Leiters 𝔖′ erstreckt. Unter Querschnitt ist natürlich eine Fläche zu verstehen, welche den von beiden Leitern gebildeten zweifach zusammenhängenden Raum in einen einfach zusammenhängenden verwandelt. Das Integrale ist eine nur von der Beschaffenheit des Leiters 𝔖′ und der Lage der Punkte A und B auf demselben abhängige Grösse. Es hängt nicht von der Beschaffenheit des mit den Punkten A und B verbundenen Leiters 𝔖 und den daselbst thätigen äusseren elektromotorischen Kräften ab. Sein Werth soll der reciproke Widerstand des Leiters 𝔖′ zwischen den Punkten A und B heissen, und mit $1/w'$ bezeichnet werden.

Ebenso findet man für einen Querschnitt des Leiters 𝔖:

$$i = -\int L\left(\frac{d\chi}{dn} - S\right) do + \vartheta \int L \frac{d\psi}{dn} do,$$

wobei S die Componente des Vektors X, Y, Z in der Richtung n senkrecht zu do ist. Die positive Normalenrichtung geht in beiden Leitern von der Seite, wo Punkt A liegt, gegen die, wo Punkt B liegt. Im Leiter 𝔖 muss daher die positive Stromrichtung mit der positiven Normalenrichtung übereinstimmen. Da vor der Berührung der beiden Leiter kein Strom war, und in 𝔖 das Potential χ herrschte, so muss:

$$\int L\left(\frac{d\chi}{dn} - S\right) do$$

für jeden Querschnitt verschwinden. Da ferner für den Punkt B die Funktionen ψ und ψ' den Werth Eins, dagegen χ den Werth a hat, so ist für diesen Punkt, der sowohl dem Leiter 𝔖 als auch 𝔖′ angehört, $\varphi = \vartheta' = a - \vartheta$. Eine etwaige Potentialdifferenz in Folge des Contakts der sich in B berührenden

Metalle wäre noch zu den in $\mathfrak{S}$ wirkenden äusseren elektromotorischen Kräften zu rechnen. Setzen wir daher noch:

63) $$\int L \frac{d\psi}{dn} do = \frac{1}{w},$$

so erhalten wir:

$$i = \frac{\vartheta}{w} = \frac{\vartheta'}{w'} = \frac{a - \vartheta'}{w} = \frac{a - \vartheta}{w'},$$

das bekannte Ohm'sche Gesetz. Die gegenwärtige Ableitung dieser Formel erscheint vielleicht übermässig complicirt. Ihr Nutzen tritt aber sofort hervor, wenn es sich um die Wirkung elektromotorischer Kräfte in nicht linearen Leitern, z. B. den beim Hall-Phänomen gebräuchlichen Platten handelt.

Natürlich erhalten wir auch die sogenannten Kirchhoff'schen Formeln für die Stromverzweigung, und es tritt recht deutlich hervor, dass deren Giltigkeit nicht auf lineare Stromleiter beschränkt, sondern bloss an die Bedingung geknüpft ist, dass die Berührung an einzelnen Punkten stattfindet. Da, was schon oft betont wurde, gemäss unseren Gleichungen sich die neutrale Elekricität, wie eine incompressible Flüssigkeit bewegt, so versteht es sich von selbst, dass in jedem Punkte, wo sich mehr als zwei Leiter berühren, die Summe aller eintretenden gleich der Summe aller austretenden Elektricität sein muss.

Betrachten wir ferner einen beliebigen aus allen Leitern hervorgehobenen geschlossenen Kreis von Leitern $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \ldots\ldots \mathfrak{S}_n$, von denen je zwei sich in einem Punkte berühren. Die Berührungspunkte seien der Reihe nach: $A_{12}, A_{23} \ldots\ldots A_{n1}$; ψ_k sei eine Funktion, welche für den Leiter $\mathfrak{S}_k$ eine analoge Differentialgleichung und analoge Oberflächenbedingungen befriedigt, wie früher ψ und ψ', also im Punkte $A_{k-1,k}$ den Werth Null, im Punkte $A_{k,k+1}$ den Werth 1 hat, und es sei:

$$w_k = 1 : \int L \frac{d\psi_k}{dn} do.$$

Ferner sei $\vartheta_{k-1,k}$ der Werth des φ im Punkte $A_{k-1,k}$; dann genügt die Funktion

$$\varphi_k = (\vartheta_{k,k+1} - \vartheta_{k-1,k})\psi_k + \vartheta_{k-1,k}$$

der Differentialgleichung und den Oberflächenbedingungen für das Potential und hat in den Punkten $A_{k-1,k}$ und $A_{k,k+1}$ auch

die richtigen Werthe, falls in dem Leiter $\mathfrak{S}_k$ keine elektromotorische Kraft thätig ist. Ist dagegen eine solche thätig, so sei χ_k der Werth der Potentialfunktion an irgend einer Stelle, wenn derselbe im Punkte $A_{k-1,k}$ gleich Null ist und alle übrigen Punkte der Oberfläche des Leiters isolirt sind. Im Punkte $A_{k,k+1}$ habe χ_k den Werth a_k. In unserem Falle dagegen sollen die Werthe des Potentials in den Punkten $A_{k-1,k}$ und $A_{k,k+1}$ gleich $\vartheta_{k-1,k}$ und $\vartheta_{k,k+1}$ sein. Daher müssen wir dem Potentiale den Werth ertheilen:

$$\varphi_k = \vartheta_{k-1,k} + (\vartheta_{k,k+1} - \vartheta_{k-1,k} - a_k)\,\psi_k + \chi_k.$$

Da

$$\int L\left(\frac{d\chi}{dn} - S\right) do$$

für jeden Querschnitt des Leiters wieder verschwindet, so ist

$$i_k = (a_k - \vartheta_{k,k+1} + \vartheta_{k-1,k}) \int L \frac{d\psi_k}{dn}\, do = (a_k - \vartheta_{k,k+1} + \vartheta_{k-1,k}) \frac{1}{w_k}.$$

Die Summe aller dieser Gleichungen liefert: $\Sigma i_k w_k = \Sigma a_k$.

Wenn in einem Leiter die Leitungsfähigkeit L sehr klein gegenüber der sämmtlicher angrenzenden Leiter ist, so ist nach der Bedingungsgleichung 60 $d\varphi / dn$ in allen umgebenden Leitern unmittelbar an seiner Oberfläche gleich Null. Der Leiter verhält sich also, wie zu erwarten stand, fast wie ein Nichtleiter. Wenn man daher auch die Existenz absoluter Nichtleiter nicht zugiebt, so sieht man doch, dass ein System sehr guter Leiter, wenn es von lauter sehr schlechten umgeben ist, sich während langer Zeit fast so verhält, als ob es vollständig isolirt wäre.

Wenn in einem einzelnen von äusseren elektromotorischen Kräften freien Leiter die Leitungsfähigkeit L sehr gross gegenüber der der Umgebung ist, so ist an seiner Oberfiäche $d\varphi / dn = 0$, in seinem Innern $\Delta \varphi = 0$, daher φ überhaupt constant.

Achte Vorlesung.

§ 16. Beispiele für die Analogie der Elektrostatik und der Theorie der stationären Strömung.

In der Theorie der stationären Strömung durch Flächen und Körper pflegt man gewöhnlich anzunehmen, dass in diesen selbst keine elektromotorischen Kräfte thätig sind, dass sie aber an zwei Stellen (den Elektroden) mit je einem Körper von sehr grosser Leitungsfähigkeit verbunden sind. In jeder Elektrode hat φ einen gegebenen Werth. Es ergeben sich hier zwei Probleme, deren Lösungen stets vollkommen analog sind.

Das erste lautet folgendermaassen: Der gesammte Raum sei von einer beliebigen Zahl von Dielektricis erfüllt, in deren Innern sich nirgends wahre Elektricität befindet. In denselben sollen sich zwei nicht in Berührung stehende, von äusseren elektromotorischen Kräften freie Leiter, die Condensatorbelegungen, befinden, in denen φ je einen gegebenen Werth hat. Im Innern jedes Dielektricums erhält man nach Gleichung 15a:

$$\frac{d\left(D\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(D\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(D\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz} = 0,$$

für jede Trennungsfläche zweier verschiedener Dielektrica nach Gleichung 40:

$$D_1\frac{d\varphi_1}{dn} = D_0\frac{d\varphi_0}{dn}.$$

Die gesammte wahre Elektricität auf einer der Condensatorbelegungen ist:

$$W = \int E_w\, do = -\frac{1}{4\pi}\int D\frac{d\varphi}{dn}\, do, \tag{64}$$

wobei der Werth von $d\varphi/dn$ im Isolator unmittelbar am Oberflächenelemente do zu nehmen ist, und die Normale vom Leiter gegen den Isolator hin zu ziehen ist.

Denken wir uns statt der Dielektrica ein System von Leitern verschiedener Leitungsfähigkeit L, statt der Condensatorbelegungen Leiter von sehr grosser Leitungsfähigkeit (Elektroden), so erhalten wir genau dieselben Gleichungen, nur

dass überall $4\pi L$ für D zu schreiben ist. Der Grösse W analog ist die Grösse:

$$J = -\int L \frac{d\varphi}{dn} do,$$

welche die Menge neutraler Elektricität darstellt, die in der Zeiteinheit aus der betreffenden Elektrode in das Leitersystem eintritt, also die Intensität des gesammten durch die betreffende Elektrode eintretenden galvanischen Stromes; die Normale geht wieder von der Elektrode in das System der anderen Leiter.

Falls die Werthe von J für beide Elektroden gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet sind, so fliesst keine Elektricität ins Unendliche ab, sonst aber zerstreut sich deren algebraische Summe ins Unendliche. Wenn die eine Elektrode die andere ganz umhüllt, kann natürlich nur der erstere Fall eintreten, daher muss in diesem Falle auch die algebraische Summe der auf beiden Condensatorbelegungen vorhandenen Elektricität gleich Null sein, was auch aus $\Delta\varphi = 0$ und dem Green'schen Satze folgt. Tritt dieser Fall bei einem Condensator ein, so nennt man den Quotienten W/b die Capacität des Condensators, wobei b die Differenz der Potentiale an beiden Condensatorbelegungen ist. Der Fall, dass nach der Capacität eines einzelnen Leiters gefragt wird, kann immer darauf zurückgeführt werden, dass die andere Belegung eine unendlich entfernte ihn umschliessende leitende Kugelfläche ist, mit der auch etwa in der Nähe befindliche zur Erde abgeleitete Leiter verbunden zu denken sind. Analog heisst, wenn J für beide Elektroden denselben Werth hat (nur entgegengesetzt bezeichnet), der Quotient J/b der reciproke Widerstand $1/w$ des Leitersystems.

Folgendes begründet noch einen quantitativen Unterschied beider Probleme. Beim letzteren kommt es häufig vor, dass gewisse Stellen im Raume nichtleitend sind, ja sogar, dass die Leiter die Form sehr dünner Flächen oder Drähte haben, und der ganze übrige Raum nichtleitend ist. Für jedes Flächenelement, welches einen Leiter vom nichtleitenden Raume trennt, ist dann $d\varphi/dn$ im Innern des Leiters, aber unmittelbar an der Oberfläche, gleich Null zu setzen. Der analoge Fall beim ersten Problem wäre der, dass sämmtliche betrachtete Dielektrica sehr grosse Werte von D, d. h. sehr

grosse Dielektricitätsconstanten gegenüber der Umgebung, hätten. Dies wird kaum irgendwo realisirt sein.

Dagegen mag schon hier bemerkt werden, dass die Gleichungen für die magnetische Induction genau dieselben wie für die dielektrische Polarisation sind, dass daher auch die magnetische Induction dieselben Gesetze befolgt, wie die stationäre elektrische Strömung, was namentlich in der Elektrotechnik ausgedehnte Anwendung gefunden hat. Zudem ist hier auch die Magnetisirungszahl des Eisens ziemlich gross gegenüber der der Luft, so dass man auch die Eisenmassen, in denen Magnetismus inducirt wird, in erster Annäherung wie Leiter betrachten kann, die sich in einem isolirenden Medium befinden. Da sich die Vorgänge vollständig identisch abspielen, ist es natürlich, auch bei Dielektricis von der Leitung der dielektrischen Induction von der einen zur anderen Condensatorbelegung zu sprechen, und D als die dielektrische Leitungsfähigkeit zu bezeichnen, welche Ausdrücke in der Lehre von der magnetischen Induction bereits allgemein üblich sind.

Bekanntlich denkt man sich in Dielektricis Curven, welche in allen Punkten die Richtung des Vektors N_1 (mit den Componenten P, Q, R) haben. Um zu bestimmen, wie dicht dieselben zu ziehen sind, lege man ein Flächenelement do senkrecht zu ihrer Richtung. Den Quotienten seines Flächeninhaltes in die Anzahl der hindurchgehenden Curven bezeichnen wir abgekürzt als die Anzahl, welche normal durch die Flächeneinheit hindurchgeht. Dieser Quotient sei immer gleich dem Produkte $D \cdot N_1$. Die Curven selbst nennen wir die Kraftlinien (besser Linien dielektrischer Polarisation). Da im Leiter $L \cdot P$, $L \cdot Q$, $L \cdot R$ die Stromcomponenten sind, so entspricht Richtung und Dichte der Kraftlinien im Dielektricum der Stromrichtung und -dichte im Leiter.[1]) Man sagt daher auch, im Dielektricum werden die Kraftlinien geleitet. Wo Elektricität ein- oder ausströmt, oder in Dielektricis, wo sich wahre Elekricität befindet, entstehen oder enden im Leiter Strom-, im Dielektricum Kraftlinien.

Wir betrachten nun ganz specielle Fälle.

---

[1]) Sollte die Uebereinstimmung eine numerische sein, so müsste die Anzahl, die normal durch die Flächeneinheit geht, gleich $D N_1 / 4\pi$ sein. In der That setzt Maxwell $f = D P / 4\pi$, aber beim Magnetismus $a = M\alpha$.

1. φ sei nur Funktion von x; für $x = 0$ sei $\varphi = 0$, für $x = a$ habe φ den Werth b; wegen

$$\frac{d^2 \varphi}{d x^2} = 0$$

wird

$$\varphi = \frac{b x}{a}.$$

Handelt es sich um das Problem der dielektrischen Polarisation, so sind die Ebenen $x = 0$ und $x = a$ zwei leitende Condensatorplatten. Die Menge W wahrer Elektricität auf der Fläche Q einer der Condensatorplatten ist:

$$\frac{D}{4\pi} \frac{b}{a} Q;$$

es ist also $DQ/4\pi a$ die Capacität C des Condensators bei beliebiger dielektrischer Zwischenschicht. Ist das reale Standardmedium Zwischenschicht, so ist $D = 1$; die Capacität ist daher $Q/4\pi a$. Die durch die Formel 11 gegebene Grösse D kann also experimentell als der Quotient dieser beiden Capacitäten definirt werden.

Wäre die Dielektricitätsconstante in dem Medium zwischen den beiden Platten sehr viel grösser als ausserhalb, so würden die obigen Formeln auch gelten, wenn die Distanz der Platten nicht klein gegen die Dimensionen ihrer Fläche Q wäre.

Die analogen Gleichungen beziehen sich bei dem Probleme der Elektricitätsleitung auf den Fall, dass an Stelle der beiden Condensatorbelegungen zwei sehr gut leitende Platten von der Fläche Q treten und der Zwischenraum ebenfalls eine leitende Substanz ist. Entsprechend der früheren Formel für W erhält man jetzt für die Stromstärke den Werth:

$$J = \frac{L \cdot b Q}{a},$$

entsprechend der Formel für die Capacität C für den reciproken Widerstand den Werth:

65) $$\frac{1}{w} = \frac{J}{b} = \frac{L Q}{a}.$$

Die specifische Leitungsfähigkeit L kann daher definirt werden als die Elektricitätsmenge, welche durch den Querschnitt 1 hindurchgeht, sobald auf die Längeneinheit die Potentialdifferenz 1 entfällt. Hier ist sie im elektrostatischen Maasse ge-

messen. In einem anderen Maasssysteme muss an ihre Stelle L_h (vgl. Gl. 22h) treten, damit zum Ohm'schen Gesetze kein constanter Faktor hinzukommt.

Bei diesem zweiten Probleme ist die Umgebung gewöhnlich so schlecht leitend, dass die Bedingungen selbst dann noch erfüllt sind, wenn Q klein ist, und der Leiter, um dessen Widerstand es sich handelt, die Form eines dünnen Drahtes hat.

2. Die beiden Condensatorbelegungen, resp. Elektroden, seien zwei coaxiale Cylinderflächen. Dann folgt aus $\Delta\varphi = 0$:

$$\varphi = a l r + A,$$

wobei a und A Constante, r die Entfernung von der Cylinderaxe, l den natürlichen Logarithmus bedeutet. Die Potentialwerthe an beiden Condensatorplatten sind:

$$\varphi_0 = a l r_0 + A \quad \text{und} \quad \varphi_1 = a l r_1 + A.$$

Die Elektricitätsmenge auf einer der Platten ist:

$$\frac{D Q a}{4 \pi r_0} = \frac{D(\varphi_1 - \varphi_0)\delta}{2(l r_1 - l r_0)}.$$

δ ist die Länge der beiden concentrischen Cylinder, der Index 0 bezieht sich auf den inneren, der Index 1 auf den äusseren derselben. Die Capacität des von beiden Cylindern gebildeten Condensators ist daher:

$$\frac{D\delta}{2(l r_1 - l r_0)}, \tag{66}$$

und analog wäre der reciproke Widerstand eines zwischen beiden Cylindern enthaltenen Leiters:

$$\frac{2\pi L \delta}{l r_1 - l r_0}.$$

Ist das umgebende Material genügend schlecht leitend, oder von genügend kleiner Dielektricitätsconstante, so braucht wiederum δ nicht sehr gross gegenüber $r_1 - r_0$ zu sein.

3. Für zwei concentrische Kugeln mit den Radien r_0 und r_1 wird:

$$\varphi = \frac{a}{r} + A,$$

daher die Elektricitätsmenge auf einer der Kugeln $W = D a$ und die Capacität

$$\frac{D r_0 r_1}{r_1 - r_0},$$

dagegen die Stromstärke $J = 4\pi a L$ und der reciproke Widerstand

$$\frac{4\pi L r_0 r_1}{r_1 - r_0}.$$

4. Etwas allgemeinere Formeln erhalten wir wie folgt. Seien r und r' die Entfernungen eines beliebigen Punktes P der xy-Ebene von zwei fixen Punkten A und B, welche die y-Coordinate 0, aber die x-Coordinate c, resp. $-c$ haben; dann genügt:

67) $$\varphi = g\, l \frac{r'}{r} + g',$$

wenn g und g' Constanten sind, wieder der Gleichung $\Delta\varphi = 0$. Die Gleichung φ = const. reducirt sich dann auf $r = a r'$. Die Curven gleichen Potentiales in der xy-Ebene sind also Kreise.

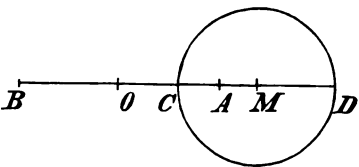


Fig. 1.

Bezeichnet man mit M den Mittelpunkt eines solchen Kreises (Fig. 1), mit C und D dessen Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe, so findet man leicht:

68) $$O C = c \cdot \frac{1-a}{1+a}, \quad O D = c \frac{1+a}{1-a}, \quad C M = \frac{2 a c}{1-a^2},$$

69) $$O C \cdot O D = O A^2, \quad A M \cdot B M = C M^2.$$

Diese Ansätze liefern direkt die Strömung der Elektricität in einer kreisförmigen Platte, deren unendlich gut leitender Rand die eine Elektrode ist, während die andere ein unendlich kleiner excentrischer Kreis vom Centrum A ist. Die zweite der Relationen 69 liefert dann den Punkt B. Aus diesen Gleichungen kann aber auch die Strömung berechnet werden, wenn die zweite Elektrode ein ebenfalls endlicher Kreis ist. Liege

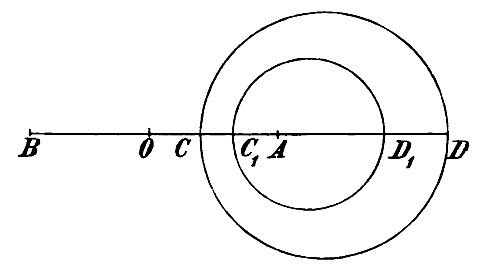


Fig. 2.

dieser ganz innerhalb der ersten Elektrode und schneide den gemeinsamen Durchmesser in den Punkten C_1 und D_1 (Fig. 2), dann können immer die Punkte A, B und O so gewählt werden, dass, bei Annahme des Werthes 67 für φ, beide Kreise Curven gleichen Potentiales sind. Die erste der Relationen 69, auf beide Kreise angewandt, liefert $OC \cdot OD = OC_1 \cdot OD_1$, daher:

$$OC = \frac{CC_1 \cdot CD_1}{DD_1 - CC_1}.$$

Die Punkte A und B ergeben sich dann aus $OA^2 = OC \cdot OD$. Die Potentialdifferenz an beiden Elektroden ist:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = g\, l \frac{r_1' \, r_0}{r_1 \, r_0'} = g\, l \frac{B\,C_1 \cdot A\,D}{A\,C_1 \cdot B\,D}.$$

Die Stromstärke bleibt dieselbe, als ob A und B unendlich kleine Elektroden wären, sie ist also:

$$J = 2\pi L g \delta,$$

wobei δ die Dicke der Platte ist.

Der Widerstand aber ist:

$$w = \frac{1}{2\pi\delta L}\, l \frac{B\,C_1 \cdot A\,D}{A\,C_1 \cdot B\,D}.$$

Die Capacität eines Condensators, der aus zwei geraden Kreiscylindern mit parallelen, aber nicht zusammenfallenden Axen besteht, ist daher, wenn die beiden Kreise der Fig. 2 die Querschnitte der beiden Cylinder sind:

$$\frac{D\delta}{2\, l \dfrac{B\,C_1 \cdot A\,D}{A\,C_1 \cdot B\,D}}.$$

Die Formeln können auch dem Falle angepasst werden, dass in einer unendlichen leitenden Platte zwei aus einander liegende kreisförmige Elektroden vorhanden sind. Der Querschnitt würde dann durch Fig. 3 dargestellt. Angewandt auf ein Dielektricum würden sie dann dem Falle entsprechen, dass die beiden Kreiscylinder ganz aus einander liegen. Hier brauchen nicht die beiden Cylinder mit gleichen Elektricitätsmengen geladen zu sein, während früher auf der inneren Fläche des äusseren Cylinders dieselbe Elektricitätsmenge wie auf der Oberfläche des inneren sitzen musste.

Die Lösung eines anderen praktisch wichtigen Problems erhalten wir, wenn wir setzen: $\varphi = g\, l(r r') + g'$. r und r' haben dieselbe Bedeutung wie sub 4, worauf sich Fig. 1 bezieht, der

in der Figur gezeichnete Kreis ist wieder derjenige, für welchen $r = a r'$ ist.

Für den normal zu diesem Kreise genommenen Differentialquotienten des φ findet man leicht

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{g(1-a^2)}{2 . OA . a} = \frac{g}{CM},$$

da

$$a = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{AM}{CM} = \frac{CM}{BM}$$

ist.[1]) Wir bezeichnen den Einströmungspunkt B in der unendlichen Ebene als das Bild des Einströmungspunktes A. Sei ausserdem noch ein zweiter Punkt A_1 innerhalb desselben Kreises gegeben, durch den gleich viel Elektricität ausströmt,

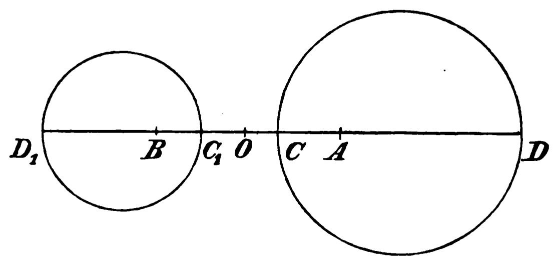


Fig. 3.

als durch den Punkt A oder durch den Punkt B einströmt, und zeichnen wir wieder das Bild B_1, durch welches nochmals die gleiche Elektricität ausströmen soll, und dessen Lage dadurch definirt ist, dass es auf der Geraden MA_1 in der Entfernung:

$$MB_1 = \frac{MC^2}{MA_1}$$

von M liegt.

Wenn die vier Elektroden A, B, A_1, B_1 in der unendlichen Ebene gegeben sind, so wird der Werth des φ in irgend einem Punkte P (dem Aufpunkte)

$$\varphi = g\, l \frac{r r'}{r_1 r_1'} + g',$$

---

[1]) Setzt man nämlich $CM = DM = r$, $OM = z$, $AM = \zeta$, so wird $\frac{AC}{BC} = \frac{c + r - z}{c - r + z} = \frac{r - \zeta}{r^2/\zeta - r}$, $\frac{AD}{BD} = \frac{z + r - c}{z + r + c} = \frac{r + \zeta}{r^2/\zeta + r}$, $z^2 = r^2 + c^2$.

wobei $r = PA$, $r' = PB$, $r_1 = PA_1$, $r_1' = PB_1$ ist. Alsdann wird für die gesammte Peripherie des Kreises

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0,$$

und man erhält also die Strömung der Elektricität durch eine begrenzte kreisförmige Platte, wenn A und A_1 zwei Elektroden von sehr kleinen Radien ϱ_0 und ϱ_1 sind. Die Potentialdifferenz ist:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = g\, l \frac{AA_1^2 . AB_1 . A_1B}{\varrho_0 . \varrho_1 . A_1B_1 . AB}.$$

die Stromstärke ist $J = 2\pi Lg\delta$, daher ist der Widerstand

$$w = \frac{1}{2\pi L\delta}\, l \frac{AA_1^2 . AB_1 . A_1B}{\varrho_0 . \varrho_1 . A_1B_1 . AB};$$

δ ist die Dicke der Platte.[1])

Für Dielektrica würde dies die Ladung zweier dünner Drähte in einem cylindrischen Dielektricum darstellen. An Stelle der Elektroden würden die Querschnitte der Drähte, an Stelle des grossen Kreises der Querschnitt des Cylinders treten, welcher von einem Dielektricum mit viel kleinerer Dielektricitätsconstante umgeben sein müsste, was offenbar keinem praktisch realisirbaren Falle entspricht.

Eine ganz andere Bedeutung hat das in gleicher Weise construirte Bild eines Punktes in der Theorie der Elektricitätsvertheilung auf Kugelflächen. Bedeutet nämlich r und r' jetzt die Entfernung eines beliebig im Raume gelegenen Punktes P von zwei Punkten A und B der Abscissenaxe, welche die Abscissen c und $-c$ haben, und setzen wir

$$\varphi = \frac{g}{r} - \frac{g}{ar'} + g',$$

wo a, g und g' wieder Constanten vorstellen, so stellt die Gleichung $r = ar'$ eine Kugelfläche dar, auf welcher φ constant gleich g' ist. Wenn also in A eine beliebige Elektricitätsmenge g und in dem Bilde B die Elektricitätsmenge

$$-\frac{g}{a} = -g\frac{CM}{AM} = -g\frac{BC}{AC}$$

---

[1]) Vgl. Kirchhoff, Ges. Abh., S. 11.

sich befindet, so ist die ganze Kugelfläche eine Fläche gleichen Potentiales, und zwar hat darauf das Potential denselben Werth, wie in unendlicher Entfernung. M ist der Mittelpunkt der Kugel, C der dem Punkte B zugewandte Durchschnittspunkt derselben mit den Abscissenaxen. Es liefert also dieser Ansatz die Elektrisirung einer leitend mit der Erde verbundenen Kugel durch eine in einem Punkte concentrirte Elektricitätsmenge.[1])

§ 17. Andeutungen über das Verhalten der Stellen, wo die äusseren elektromotorischen Kräfte ihren Sitz haben.

Es war ursprünglich meine Absicht, an dieser Stelle noch einige specielle Fälle, so die Elektricitätsvertheilung auf zwei leitenden Kugeln und das Problem des Condensators von endlicher Plattendicke, zu behandeln, dessen zuerst von Kirchhoff gegebene Lösung leicht von der Beschränkung frei gemacht werden kann, dass die Platten kreisförmig sind, wenn nur der Krümmungsradius der Plattenperipherie überall gross gegen die Plattendicke und Plattendistanz ist. Doch die Anzahl der Fragen, die speciell die Maxwell'sche Theorie und deren Zusammenhang mit der älteren betreffen, ist noch so gross, dass ich lieber wieder zu ihnen zurückkehren will.

Eine derartige Frage ist die über die Beschaffenheit der äusseren elektromotorischen Kräfte. Obwohl über dieselben wenig bekannt ist, so trägt es doch zur Versinnlichung bei, noch einige Resultate unter bestimmten, wenigstens nicht unwahrscheinlichen Voraussetzungen abzuleiten.

Wir beginnen mit einem rein formellen Uebungsbeispiele. Der ganze Raum sei mit einer einzigen homogenen, leitenden Substanz erfüllt, die zu Anfang vollkommen unelektrisch und unmagnetisch und ohne äussere elektromotorische Kräfte war.

Von $t = 0$ an seien folgende unveränderliche äussere elektromotorische Kräfte thätig. Zwischen $x = 0$ und $x = a$ sei $X = f(x)$, $Y = Z = 0$. Wegen der Symmetrie kann dann

[1]) Vgl. Thomson, pap. on electrostat. Liouv. j. 1845, 1847. Maxwell treat. chapt. XI. etc.

keine Grösse Funktion von y und z werden. Auch muss $Q = R = \beta = \gamma = 0$ bleiben. Die Gleichung D liefert

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Es wird also auch α gleich Null bleiben. Die Gleichung C liefert:

$$D \cdot \frac{dP}{dt} + 4\pi L \cdot [P + f(x)] = 0,$$

daher

$$P = \left(e^{-4\pi \frac{Lt}{D}} - 1\right) f(x).$$

Sobald die Exponentielle genügend klein geworden ist, haben wir $P = 0$ für $x < 0$ und $x > a$, $P = -f(x)$ zwischen diesen Grenzen. Es hat sich dieser Zwischenraum mit wahrer Elektricität geladen, deren Dichte

$$\varepsilon_w = -\frac{D}{4\pi} \cdot f'(x)$$

ist. Die gesammte Menge der wahren Elektricität zwischen $x = 0$ und $x = a$ ist gleich Null, da $f(x)$ mit dem Werthe Null beginnt und endet. Jeder plötzliche Sprung von $f(x)$ muss als rascher, aber continuirlicher Uebergang aufgefasst werden, da sonst ε_w exakt gleich unendlich würde.

Es existirt ein elektrostatisches Potential, das für $x < 0$ einen constanten Werth K hat; für $0 < x < a$ hat es den Werth:

$$K + \int_0^x f(x)\, dx,$$

für $x > a$ ist es wieder constant gleich:

$$K + \int_0^a f(x)\, dx.$$

Ist a sehr klein, so nennen wir dies eine verwaschene elektrische Doppelschicht. Die elektromotorische Kraft ist

$$\int_0^a f(x)\, dx.$$

Die Bedingung, dass der Körper unbegrenzt sei, ist dann nicht nothwendig; es genügt, dass alle seine Dimensionen gross gegen

a sind. Auch werden dieselben Gleichungen angenähert gelten, wenn die Doppelschicht die Gestalt einer krummen Fläche hat, nur tritt dann deren Normale an die Stelle der x-Axe.

Wenn speciell $f(x)$ von $x = 0$ bis $x = \delta$ sehr rasch zunimmt, dann constant gleich b bleibt, dann von $x = a - \delta$ bis $x = a$ wieder rasch bis Null abnimmt, so sind nur die beiden Ebenen $x = 0$ und $x = a$ mit der Flächendichte $\pm D b / 4\pi$ geladen. Dazwischen ist das elektrostatische Potential $K + x.b$. Man könnte dies eine scharfe Doppelschicht nennen.

In den meisten Fällen können wir uns die Wirksamkeit der äusseren elektromotorischen Kräfte durch eine den betreffenden Leiter $\mathfrak{S}$ in zwei getrennte Theile zerschneidende Doppelschicht ersetzt denken. Es kann dann der in § 15 erwähnte Leiter $\mathfrak{S}_A$ den Leiter $\mathfrak{S}$ in beliebig vielen Punkten des einen, der Leiter $\mathfrak{S}_B$ in beliebig vielen Punkten des anderen Theiles berühren.

Wir gehen nun zu einem allgemeineren Fall über. Wir haben einen beliebigen Leiter. Es soll eine eindeutige, von der Zeit unabhängige Funktion χ existiren, die für jeden Punkt desselben einen bestimmten Werth hat, und es soll sein:

$$70)\qquad X = \frac{d\chi}{dx}, \quad Y = \frac{d\chi}{dy}, \quad Z = \frac{d\chi}{dz}.$$

Wir warten ab, bis die elektromagnetischen Wellen verlaufen sind, also der Zustand aphot geworden ist Dann muss nach Gleichung 33 sein:

$$P = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad Q = -\frac{d\varphi}{dy}, \quad R = -\frac{d\varphi}{dz}.$$

Wenn L und D constant sind, liefert die Gleichung 16a

$$D\frac{d\Delta\varphi}{dt} + 4\pi L \Delta\varphi = 4\pi L \Delta\chi,$$

daher

$$\Delta\varphi = \Delta\chi + \Phi e^{-\frac{4\pi L t}{D}},$$

wobei Φ eine aus den Anfangsbedingungen zu bestimmende Funktion der Coordinaten ist. Solange das letzte Glied bemerkbar ist, ist die Elektricitätsbewegung zwar aphot, aber noch nicht stationär geworden. Für grössere Werthe von L kann auch wohl der Beginn des aphoten Zustandes mit dem des stationären zusammenfallen. Jedenfalls muss aber endlich

stationäre Strömung oder statisches Gleichgewicht eintreten. Dann ist alles von der Zeit unabhängig und man hat daher $\Delta\varphi = \Delta\chi$. Sind L und D Funktionen der Coordinaten, so ergiebt sich für den aphoten Zustand:

$$\text{71)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{d\left(D\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(D\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(D\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz}\right]\\ &\qquad+\left[\frac{d\left(L\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(L\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(L\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz}\right]\\ &\qquad=\left[\frac{d\left(L\frac{d\chi}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(L\frac{d\chi}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(L\frac{d\chi}{dz}\right)}{dz}\right].\end{aligned}\right.$$

Für den stationären Zustand folgt aus Gleichung 58:

$$\text{72)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\left(L\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(L\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(L\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz}\\ &\qquad=\frac{d\left(L\frac{d\chi}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(L\frac{d\chi}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(L\frac{d\chi}{dz}\right)}{dz}.\end{aligned}\right.$$

Ist der Leiter rings von Nichtleitern umgeben, so liefert die Gleichung 61 im stationären Zustand für jedes Oberflächenelement:

$$\text{73)}\qquad \frac{d\varphi}{dn}=\frac{d\chi}{dn}.$$

Nach dem schon früher erwähnten Satze der Potentialtheorie folgt aus den Gleichungen 72 und 73 $\varphi = \chi + \text{const.}$ Es wird also jedes Volumelement des Leiters sich mit wahrer Elektricität von der Dichte:

$$-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d\left(D\frac{d\chi}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(D\frac{d\chi}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(D\frac{d\chi}{dz}\right)}{dz}\right]$$

laden.

Wenn sich der Index 1 auf das umgebende Dielektricum bezieht, und die Normale n vom Leiter gegen das Dielektricum hingezogen wird, so ist an jedem Oberflächenelement des Leiters, solange man sich noch im Leiter befindet, $\varphi = \chi$

+ const., und die Oberflächendichte der wahren Elektricität ist daselbst:

$$E_w = \frac{1}{4\pi}\left(D\frac{d\chi}{dn} - D_1\frac{d\varphi_1}{dn}\right).$$

Die Constante bestimmt sich, wenn die gesammte wahre Elektricitätsmenge im Leiter gegeben ist und φ im Unendlichen verschwinden soll.

Wir betrachten folgende specielle Formen von χ. Es seien die äusseren elektromotorischen Kräfte so im ganzen Leiter vertheilt, dass in dem ganzen Raum zwischen dessen Oberfläche und einer von derselben überall endlich abstehenden, ganz im Innern des Leiters verlaufenden, vollkommen geschlossenen Fläche F die Funktion χ constant ist, so dass man von der Oberfläche des Leiters an die Stellen, wo χ veränderlich ist, nicht gelangen kann, ohne eine endliche Strecke zu passiren, auf welcher χ constant ist. Dann muss auch φ zwischen der Oberfläche und der Fläche F constant sein.

Diese Bedingung ist dieselbe, als ob gar keine äusseren elektromotorischen Kräfte im Innern des Leiters vorhanden wären. Die Wirksamkeit derselben macht sich also nur im Momente ihres Entstehens dadurch bemerkbar, dass eine gewisse Menge wahrer Elektricität in das Innere gezogen und zur Neutralisation der äusseren elektromotorischen Kräfte verwendet wird.

Eine andere specielle Form von χ wäre folgende: In zwei Partien $\mathfrak{S}_A$ und $\mathfrak{S}_B$ des Leiters sei χ constant gleich χ_A, resp. χ_B. Dazwischen liege eine Schicht $\mathfrak{S}$, die rings an die Oberfläche des Leiters reicht, und worin χ variabel ist. Dann zeigen diese beiden Partien genau die Eigenschaft der in § 15 ebenso bezeichneten Leiter. Das Charakteristische ist, dass es in $\mathfrak{S}$ nirgends stationäre elektrische Ströme geben kann.

§ 18. Wirkung äusserer elektromotorischer Kräfte in einem ringförmigen Leiter.

Ein dritter specieller Fall ist der, dass χ eine mehrdeutige Funktion der Coordinaten ist. Dies kann nur stattfinden, wenn der Leiter einen mehrfach zusammenhängenden Raum bildet, da X, Y, Z jedenfalls eindeutig bestimmt sein müssen.

Wir wollen nur einen zweifach zusammenhängenden, also ringförmigen Raum betrachten. Zu beiden Seiten eines Querschnittes desselben können dann die beiden Werthe von χ, die man durch einen Umgang um den Ring erhält, nur um eine Constante verschieden sein, die k heissen mag, da ja alle Differentialquotienten von χ eindeutig und continuirlich sind.

φ muss für den stationären Zustand wieder den Bedingungen 72 und 73 genügen, aber es muss eindeutig sein, da seine Fortsetzung ausserhalb des Ringes auch die dort herrschenden Werthe von P, Q, R nach Formel 33 liefern muss, und φ nirgends einen plötzlichen Sprung machen darf. Es gibt dann jedenfalls eine und (abgesehen von einer additiven Constante) nur eine Funktion χ_1, welche im Innern des Ringes die Gleichung erfüllt:

$$\frac{d\left(L\frac{d\chi_1}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(L\frac{d\chi_1}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(L\frac{d\chi_1}{dz}\right)}{dz}=0,$$

auf der Oberfläche des Ringes die Gleichung:

$$\frac{d\chi_1}{dn}=0,$$

und deren sämmtlichen Ableitungen durchwegs continuirlich sind, während die Funktion χ_1 selbst sonst ebenfalls überall continuirlich ist, nur dass ihre Werthe zu beiden Seiten einer Schnittfläche des Ringes um die Einheit verschieden sind. Dies folgt unmittelbar aus dem mehrfach citirten Riemann'schen Satze, wenn man den Ring wirklich durch die Schnittfläche in einen einfach zusammenhängenden Raum verwandelt.

Wenn L constant ist, stellt χ_1 das Geschwindigkeitspotential einer incompressiblen, rotationslosen Flüssigkeit dar, die im Ringe strömt. Man kann dann setzen $\varphi=\chi-k\chi_1$. Die Funktion φ erfüllt dann in der That die Bedingungen 72 und 73 und bleibt auch im ganzen Ringe eindeutig. Es gilt von der Funktion φ dasselbe wie im Vorhergehenden, sie giebt eine Ansammlung von wahrer Elektricität im Innern und an der Oberfläche des Ringes, welche die äusseren elektromotorischen Kräfte zwar nicht vollständig compensirt, aber doch bewirkt, dass die Strömung in jedem Punkte des Ringes

nur mehr vom Werthe der Constanten k abhängt. In der That ist nach den Gleichungen 23:

$$p = L(P + X) = L\left(-\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\chi}{dx}\right) = L k \frac{d\chi_1}{dx}.$$

Analoge Werthe gelten für q und r. χ_1 aber ist nur von der Gestalt des Ringes und der Vertheilung der Leitungsfähigkeit daselbst abhängig.

Die gesammte Stromstärke ist:

$$J = k \int L \frac{d\chi_1}{dn} do,$$

wobei die Integration über einen Querschnitt des Ringes zu erstrecken ist. Wenn der Ring aufgeschnitten wäre, so wäre k die Differenz der Werthe des φ zu beiden Seiten der Schnittfläche. Es ist also φ die elektromotorische Kraft und

$$\int L \frac{d\chi_1}{dn} do$$

der reciproke Widerstand des ganzen Ringes, was mit Gleichung 63 (§ 15) übereinstimmt. Dasselbe Resultat hätte man auch noch nach einer später zu besprechenden Methode (§ 26) finden können, indem man φ durch Bildung des Integrals $\int(P dx + Q dy + R dz)$ für jeden Stromfaden eliminirt hätte.

Auch in dem in dieser und der vorhergehenden Vorlesung betrachteten Falle, dass X, Y, Z zwar nicht verschwinden, aber von der Zeit unabhängig sind, kann man sich überzeugen, dass die gefundenen Integrale unabhängig von der Art und Weise, wie sie gewonnen wurden, den Grundgleichungen ohne jede Vernachlässigung genügen. Falls keine stationären Ströme vorhanden sind, können dabei α, β, γ entweder gleich Null oder die partiellen Ableitungen einer beliebigen Funktion der Coordinaten nach diesen sein. Findet dagegen stationäre Strömung statt, so sind die Grössen α, β, γ nicht von P, Q, R unabhängig, und der Beweis, dass die Fundamentalgleichungen ohne Vernachlässigung erfüllt sind, kann nur mittelst Zuziehung der Werthe von α, β, γ geschehen, welche wir in den folgenden Paragraphen finden werden. Er ergiebt sich ohne jede Rechnung, da ja alle in den gefundenen

Integralen vorkommenden Grössen von der Zeit unabhängig sind, und daher in den Fundamentalgleichungen die Glieder, welche wir bei Gewinnung unserer Integrale als sehr klein vernachlässigt haben, absolut verschwinden, sobald man die Integrale in die Fundamentalgleichungen substituirt.

Neunte Vorlesung.

§ 19. Magnetische Erscheinungen, im Falle dass elektrische Erscheinungen entweder ganz fehlen, oder sich bloss auf elektrostatische beschränken.

Wir haben bisher die Grössen α, β, γ aus den Gleichungen eliminirt. Es entsteht nun die Frage, in welchen Fällen diese Grössen von Null verschiedene Werthe annehmen, und zu welchen Erscheinungen dies Veranlassung giebt.

Aus den allgemeinen Gleichungen D folgt, wenn man die erste nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differenzirt und sie dann addirt, ganz allgemein:

74) $$\frac{d}{dt}\left[\frac{d(M\alpha)}{dx}+\frac{d(M\beta)}{dy}+\frac{d(M\gamma)}{dz}\right]=0.$$

Wenn zunächst bloss elektrostatische Erscheinungen ohne elektrische Ströme vorhanden sind, so ist keine Grösse mit der Zeit veränderlich; zudem verschwinden in Leitern die Grössen $P+X$, $Q+Y$, $R+Z$; daher sind nach c die Grössen α, β, γ die partiellen Ableitungen einer Funktion nach den Coordinaten, und wir können setzen:

33m) $$\alpha=-\frac{d\psi}{dx},\quad \beta=-\frac{d\psi}{dy},\quad \gamma=-\frac{d\psi}{dz}.$$

Stellen wir uns bloss auf den Standpunkt der mit römischen Buchstaben bezeichneten Gleichungen, so erhalten wir also:

75) $$\frac{d}{dt}\left[\frac{d\left(M\frac{d\psi}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(M\frac{d\psi}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(M\frac{d\psi}{dz}\right)}{dz}\right]=0.$$

Es folgt daher, dass die Grösse in der eckigen Klammer,

welche wir die Dichte des wahren Magnetismus nennen und mit η_w bezeichnen wollen, mit der Zeit durchaus unveränderlich ist, woraus wieder nach dem citirten Riemann'schen Satze sich ergiebt, dass auch ψ nicht Funktion der Zeit sein kann. Denn im Unendlichen muss ψ constant (wir können sagen gleich Null) sein, und Trennungsschichten fassen wir als continuirliche Uebergänge auf, für welche die Gleichung 75 ebenfalls gilt.

Falls also ψ überhaupt Funktion der Coordinaten sein soll, müssen die betreffenden wahren Magnetismen schon von aller Ewigkeit her bestanden haben, oder es müssten zu irgend einer vorhergegangenen Zeit unsere Gleichungen nicht gegolten haben. Dadurch könnte in gewissen Körpern (den Stahlmagneten) wahrer Magnetismus entstanden sein, und dieser müsste so lange fortbestehen, bis wieder eine Zeitperiode kommt, wo die Gleichungen ungiltig werden. Die Gleichungen sind dann vollkommen analog mit denen für Dielektrica, nur dass $M, \alpha, \beta, \gamma, \psi$ an Stelle von D, P, Q, R, φ treten.

Wir können daher die magnetischen Erscheinungen wieder versinnlichen, indem wir annehmen, dass ein positives und ein negatives magnetisches Fluidum existirt, welche sich in den Körpern gerade so verhalten, wie die Verschiebungselektricität in den Dielektricis. Das Analogon der strömenden Elektricität fällt aber beim Magnetismus vollständig fort. α, β, γ sind die Kräfte, welche auf die Einheit des wahren Magnetismus wirken.

Für permanente Magnete unterscheidet sich dieses Bild von der landläufigen Theorie, nach welcher in solchen die Magnetismen sehr schwer beweglich sind, insofern, dass der wahre Magnetismus (natürlich immer gleich viel positiver und negativer) irgend einmal hineingekommen ist, während der darin enthaltene neutrale Magnetismus denselben Gesetzen, wie im weichen Eisen, gehorcht. Man nähert sich der landläufigen Theorie mehr, wenn man in Stahlmagneten M sehr nahe gleich Eins annimmt, so dass daselbst der neutrale Magnetismus fast unbeweglich wird, die Luft als unmagnetisirbar vorausgesetzt. Natürlich waren dann zur Erzeugung eines kräftigen permanenten Magnetismus, welche ja ohnedies in eine Zeitperiode der Ungiltigkeit unserer Gleichungen fiel, enorme magnetisirende

Kräfte erforderlich. Gerade so wie früher die scheinbare Fernwirkung zweier gegebener wahrer Elektricitäten dem D, also der Dielektricitätsconstante, verkehrt proportional war, so ist jetzt die zweier gegebener Mengen wahren Magnetismus dem M verkehrt proportional, und wir können die Grösse M nach Quincke's Vorgang die Dimagnetisirungsconstante nennen, da sie der Dielektricitätsconstante vollkommen analog ist.

In der Elektrostatik waren die elektrischen Kräfte P, Q, R natürlich von dem Werthe der damals angenommenen Zahl $\mathfrak{d}$ vollkommen unabhängig. Die dielektrischen Polarisationen aber, welche wir uns im Innern der Dielektrica vorstellten, waren davon abhängig; sie waren im Standardmedium z. B. gleich Null, wenn wir daselbst $D = \mathfrak{d} = 1$ annahmen. Genau dasselbe gilt auch in der Lehre vom Magnetismus. Wir müssen da eine dem $\mathfrak{d}$ analoge Zahl $\mathfrak{m}$ wählen und verstehen, auch wenn die Gleichungen 33m nicht erfüllt sind, unter der Dichte des freien Magnetismus die Grösse:

$$37\text{m})\qquad \eta_f = \frac{\mathfrak{m}}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right),$$

während wir

$$15\text{m})\qquad \eta_w = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d(M\alpha)}{dx} + \frac{d(M\beta)}{dy} + \frac{d(M\gamma)}{dz}\right]$$

die von $\mathfrak{m}$ unabhängige Dichte des wahren Magnetismus nennen.

In unserem speciellen Falle, wo die Gleichungen 33m gelten, wird:

$$35\text{m}\qquad \eta_f = -\frac{\mathfrak{m}}{4\pi}\Delta\psi,$$

$$15\text{am})\qquad \eta_w = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d\left(M\frac{d\psi}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(M\frac{d\psi}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(M\frac{d\psi}{dz}\right)}{dz}\right].$$

Auch die magnetischen Kräfte α, β, γ sind von $\mathfrak{m}$ unabhängig, nicht aber die magnetischen Polarisationen, welche wir uns im Innern der Körper denken. Wir bezeichnen die Gleichungen stets mit derselben Ziffer, wie die entsprechenden der Elektricitätslehre und deuten nur durch ein angehängtes m die Beziehung auf den Magnetismus an.

Sprechen wir immer nur von der Richtung der Abscissen-

axe, so ist das magnetische Moment der Volumeinheit entsprechend der Formel 46 gegeben durch

46m) $$\frac{M - \mathfrak{m}}{4\pi}\alpha.$$

Denken wir uns $\mathfrak{m}$ verschwindend, so dass die gesammte magnetische Arbeit magnetische Polarisationsarbeit ist und kein Glied existirt, welches der Veränderung eines Formwirkungspotentiales entspräche, so verwandelt sich das magnetische Moment der Volumeinheit in die Grösse, deren 4π faches Maxwell die magnetische Induction nennt und mit a bezeichnet. Dieselbe ist für Luft, wo $M = 1$ ist,

$$a_l = \alpha,$$

für einen anderen Körper

$$a = M\alpha.$$

Nimmt man dagegen an, dass die Luft magnetisch unpolarisirbar sei, und will man nur das magnetische Verhalten der übrigen Körper gegen Luft durch deren magnetische Polarisirbarkeit erklären, so hat man $\mathfrak{m} = 1$ zu setzen. Das magnetische Moment der Volumeinheit, welches man alsdann erhält, nennt Maxwell die Intensität der Magnetisirung und bezeichnet sie mit A. Dieselbe ist für Luft $A_l = 0$, für andere Körper:

$$A = \frac{M - 1}{4\pi}\alpha.$$

v. Helmholtz nennt die Grösse A einfach das magnetische Moment der Volumeinheit, bezeichnet sie mit λ und setzt sie gleich $\vartheta\alpha$. Es ist also:

75) $$\vartheta = \frac{M - 1}{4\pi}, \quad M = 1 + 4\pi\vartheta$$

und daher

76) $$\alpha + 4\pi A = a.$$

Diese Gleichung ist einer physikalischen Interpretation fähig. Ist ein Magnetpol von der Intensität 1 in eine Flüssigkeit getaucht, so wirkt darauf einfach die Kraft α. Dies entspricht vollkommen der v. Helmholtz'schen Annahme, dass, wenn ein mit wahrer Elektricität geladener Körper in eine Flüssigkeit taucht, die in der Abscissenrichtung darauf wirkende Kraft einfach gleich P multiplizirt mit der wahren Elektricität

desselben ist, da die durch dielektrische Polarisation um ihn herumgeschobene Hülle überall mitfolgen kann. Befindet sich der Magnetpol von der Stärke 1 aber im Innern eines festen Körpers, so muss, damit überhaupt eine Kraftwirkung zur Beobachtung gelangen kann, rings um denselben ein Loch gebohrt werden. Da ist nun α nur dann die Kraft, welche auf einen Magnetpol von der Stärke 1 in der Abscissenrichtung wirkt, wenn das Loch die Gestalt eines in dieser Richtung sehr stark verlängerten Cylinders hat, da dann die an beiden Endflächen des Cylinders durch magnetische Polarisation ausgeschiedenen Magnetismen auf den Pol von der Stärke 1 eine verschwindende Wirkung ausüben. Die auf der Mantelfläche etwa erscheinenden Magnetismen aber können ebenfalls in der Richtung der Abscisse keine Wirkung ausüben.

Ganz andere Consequenzen erhielte man, wenn das Loch umgekehrt die Gestalt eines Cylinders hätte, dessen Axe parallel der Abscissenaxe, aber sehr kurz gegen den Querschnitt wäre. Das Loch ist natürlich mit dem Standardmedium (Luft) gefüllt zu denken. Dann würde, unter der Annahme, $\mathfrak{m} = 1$, in der Luft im Innern des Loches keine magnetische Polarisation vorhanden sein. In der unmittelbaren Umgebung aber hätte die Volumeinheit das magnetische Moment A. Dies hätte denselben Effekt, als ob die Basis des cylindrischen Loches, welche wir vom Magnetpol aus gegen die negative Abscissenrichtung gelegen annehmen, mit magnetischem Fluidum von der Flächendichte $+A$ belegt wäre; der Magnetpol liegt zwischen Basis und Gegenfläche des cylindrischen Loches. Diese Gegenfläche wäre mit magnetischem Fluidum von der Flächendichte $-A$ belegt zu denken. Da beide Flächen dem Magnetpole sehr nahe liegen, so findet man leicht, dass sie die Gesammtkraft $4\pi A$ auf denselben in der positiven Abscissenrichtung ausüben. Dazu kommt noch die von aussen wirkende Kraft α. Bei dieser zweiten Gestalt des Loches wird also auf den Magnetpol die Gesammtkraft $\alpha + 4\pi A = a$ wirken (vgl. Schluss des § 13).

Wir bemerken noch folgendes. Nach Maxwell hat μ auch in der Luft einen von Null verschiedenen Werth μ_l; auch Luft enthält daher unter dem Einflusse magnetischer Kräfte magnetische Energie V. Diese ist es sogar allein, welche die

elektrodynamischen und magnetischen Fernkräfte vermittelt. Wenn man will, kann man sagen, Luft sei nach Maxwell magnetisch polarisirbar. In unserem Bilde aber ist sie, wenn man $\mathfrak{m} = 1$ setzt, wie auch die alte Fernwirkungslehre annimmt, nicht polarisirbar. Aber andere Körper, in denen M nicht gleich 1 ist, sind es, und A ist das, was man in der alten Theorie, welche die Luft als magnetisch unpolarisirbar annahm und die magnetischen Kräfte daselbst der direkten Fernwirkung zuschrieb, das magnetische Moment der Volumeinheit des betreffenden Körpers nannte; wir könnten es vielleicht das magnetische Moment relativ gegen Luft nennen. Für einen Ring oder einen dünnen langen Cylinder, dessen Axe der Abcissenaxe parallel ist, ist diese Grösse:

$$A_L = \vartheta\, \alpha_a = \frac{M-1}{4\pi}\,\alpha_a,$$

wobei α_a die magnetische Kraft ist, die dort wirkt, nachdem der Ring oder Cylinder entfernt wurde. Bringt man an dieselbe Stelle des Feldes einen sehr kurzen Cylinder mit gleichgerichteter Axe, und bezeichnet den Werth von A, welcher in dessen Innern sich bildet, mit A_Q, so kommt in seinem Innern zur Kraft α_a noch $-4\pi A_Q$ hinzu, daher wird

$$A_Q = \vartheta\,(\alpha_a - 4\pi A_Q) = \vartheta\,\alpha_a / M.$$

Es kann also M als der Quotient A_L / A_Q bezeichnet werden. Bringt man in dasselbe Feld eine Kugel aus gleicher Substanz, so liegt für dieselbe A zwischen A_L und A_Q, worüber die bekannte Magnetisirungstheorie das Nähere lehrt.

Wir wollen im folgenden zunächst immer $\mathfrak{m} = 1$ setzen und erhalten dann für die Dichte des freien Magnetismus:

35m) u. 37m) $$\eta_f = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) = -\frac{1}{4\pi}\Delta\psi,$$

wobei

36m) $$\psi = \int \frac{\eta_f\, d\tau}{\varrho}$$

ist. Wir wollen nun Curven (die Magnetkraftlinien, besser Linien der magnetischen Induction) ziehen, welche überall die Richtung des Vektors $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ haben, und zwar in solcher Dichte, dass die durch die Flächeneinheit senkrecht

hindurchgehende Zahl $\mathfrak{z}$ dieser Curven gleich der Grösse dieses Vektors ist.

Die Menge wahren Magnetismus in einem Volumelemente $d\tau$ ist nach Formel 15m):

$$\eta_w \, d\tau = \frac{1}{4\pi} \, d\tau \left[\frac{d(M\alpha)}{dx} + \frac{d(M\beta)}{dy} + \frac{d(M\gamma)}{dz} \right].$$

Die Anzahl der Kraftlinien also, welche in dem Volumelemente $d\tau$ ihren Ursprung nehmen (Ueberschuss der austretenden über die eintretenden) ist $4\pi\eta_w \, d\tau$. Wo kein wahrer Magnetismus ist, können Kraftlinien weder entspringen noch enden. Zwischen den wahren Magnetismusmengen m_w und m'_w wirkt in einem Medium, wo M constant ist, die Kraft:

54m) $$m_w \, \alpha = \frac{m_w \, m'_w}{M \varrho^2}.$$

Durch den wahren Magnetismus (Magnetpol) m_w sollen in der Distanz ϱ die Werthe ψ_p, α_p, β_p, γ_p bedingt werden. Dann ist:

$$\psi_p = \frac{m_w}{M\varrho}, \quad M\sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2 + \gamma_p^2} = \frac{m_w}{\varrho^2}.$$

Die Anzahl der Kraftlinien, welche von dem Magnetpole m_w ausgehen, ist $Z = 4\pi \int \eta_w \, d\tau = 4\pi m_w$.

Die Annahme, dass unsere Gleichungen zu gewissen Zeiten nicht giltig seien, welche allein ein Entstehen von wahrem Magnetismus ermöglicht, scheint auf den ersten Anblick ziemlich plausibel; einerseits gelten dieselben überhaupt nur für ruhende Körper; dies freilich nützt uns nichts, da, wie wir sehen werden, auch die Maxwell'schen Gleichungen für bewegte Körper keine Möglichkeit einer Entstehung von wahrem Magnetismus offen lassen. Aber es ist andererseits bekannt, dass diese Gleichungen für viele magnetisirbare Körper, und zwar gerade für die wichtigsten, einer wesentlichen Correction bedürfen, da für diese die Gleichungen aufhören, linear zu sein. Trotzdem hat es sein Bedenkliches, einen so wichtigen Begriff, wie den des Magnetismus, lediglich auf die Annahme der Ungiltigkeit der Maxwell'schen Gleichungen in gewissen Fällen zu basiren. Dies gilt noch mehr, wenn man sich auf den in der ersten Vorlesung eingenommenen mechanischen Standpunkt stellt, wo das Verschwinden alles wahren Magnetismus un-

mittelbar aus den Gleichungen 5 folgt, welche sogar die Definitionsgleichungen der Grössen α, β, γ sind.

Diese Schwierigkeit wird vollkommen vermieden, wenn man die Ampère'sche Hypothese der Molekularströme auf die Maxwell'sche Theorie überträgt. Nach dieser giebt es Magnetismus ohne elektrische Ströme überhaupt nicht. Die magnetischen Eigenschaften der Stahlmagnete haben ihre Ursache in elektrischen Strömen, welche die Moleküle derselben umkreisen.

Trotzdem wollen wir zunächst, um die möglichste Allgemeinheit zu erhalten, bloss die Gleichungen D, nicht die specielleren 5 als giltig voraussetzen und daher das Vorhandensein von wahrem Magnetismus an gewissen Stellen nicht ausschliessen, der sich aber mit der Zeit nicht ändern kann. Später können wir denselben immer wieder gleich Null setzen.

§ 20. Magnetische Erscheinungen bei Vorhandensein stationärer Strömungen, abgeleitet unter Annahme der Existenz von wahrem Magnetismus.

Wir betrachten nun den Fall stationärer Strömung. Für dieselbe ist nach Gleichung 23 $p = L(P + X)$, und wir sahen, dass X, Y, Z, P, Q, R nicht mit der Zeit veränderlich sind. Die Differenz der beiden letzten der Gleichungen C, erstere vorher partiell nach z, letztere nach y differenzirt, liefert:

$$\Delta\alpha = \frac{4\pi}{\mathfrak{V}}\left(\frac{dr}{dy} - \frac{dq}{dz}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right),$$

woraus folgt:

77) $$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

wenn

78) $$\alpha_1 = \frac{1}{\mathfrak{V}}\left(\frac{d\overline{q}}{dz} - \frac{d\overline{r}}{dy}\right),$$

33m) $$\alpha_2 = -\frac{d\psi}{dx}.$$

gesetzt wird. Analoge Gleichungen gelten für die y- und z-Axe. Dabei ist

36m) $$\psi = \int\frac{\eta_f\, d\tau}{\varrho} = \frac{1}{4\pi}\left(\overline{\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}}\right),$$

da

37m) $$\eta_f = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right)$$

ist. ψ (das magnetische Potential) ist vollkommen analog dem elektrostatischen Potentiale φ. Dagegen kommen die Glieder mit $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ neu hinzu. Es sind dies die sogenannten Vektorpotentiale, welche durch folgende Gleichungen definirt sind:

79) $$\bar{p} = \int \frac{p\,d\tau}{\varrho}, \quad \bar{q} = \int \frac{q\,d\tau}{\varrho}, \quad \bar{r} = \int \frac{r\,d\tau}{\varrho}.$$

Wenn wir die Giltigkeit der Gleichungen 5 nicht voraussetzen, also die Möglichkeit von wahrem Magnetismus annehmen, so sind α, β, γ die Kräfte, welche auf die wahre Magnetismusmenge eins in den Coordinatenrichtungen wirken, was wir schon früher für den Fall nachgewiesen haben, dass nur Magnetismen wirksam sind. Da nun diese Kräfte nur vom Zustand der unmittelbaren Umgebung, nicht aber davon abhängen können, wie dieser Zustand erzeugt wurde, so muss dies auch gelten, wenn er durch elektrische Ströme hervorgerufen wird, sobald nur der wahre Magnetismus ruht und an der betreffenden Stelle selbst keine elektrischen Ströme vorhanden sind.

Wären diese Bedingungen nicht erfüllt, so hätte schon die unmittelbare Umgebung der Magnetismusmenge eine andere Beschaffenheit, als sie beim Beweise vorausgesetzt wurde; es müsste also dieser noch geführt werden. Schliessen wir die Möglichkeit von wahrem Magnetismus aus, so hören die Formeln 77, 78, 33m, 36m, 37m, 79 nicht auf, richtig zu sein, nur dass immer $\eta_w = 0$ ist; aber die physikalische Bedeutung von α, β, γ muss erst gefunden werden. Dann kann man auch schreiben:

80) $$\eta_f = -\frac{1}{4\pi M}\left(\alpha\frac{dM}{dx} + \beta\frac{dM}{dy} + \gamma\frac{dM}{dz}\right).$$

Es ist dies der in Folge der magnetischen Kräfte der elektrischen Ströme dort, wo M variabel ist, respektive an der Grenzfläche zweier Körper von verschiedenem M, frei werdende Magnetismus, ausser welchem überhaupt weder freier noch wahrer Magnetismus existirt. Die Bedeutung der Vektor-

potentiale ist eine sehr bekannte. Trotzdem will ich hier der Vollständigkeit halber dieselbe in Erinnerung zurückrufen.

1. Wir nehmen an, wir hätten nur lineare Ströme. Sei ds' ein Längenelement eines solchen x', y', z' dessen Coordinaten, dx', dy', dz' dessen Projektionen auf die Coordinatenaxen, i' die daselbst herrschende elektrostatisch gemessene Stromintensität, σ der Querschnitt des Stromleiters und ϱ dessen Entfernung von dem Punkte mit den Coordinaten x, y, z, wo α, β, γ gesucht werden, endlich seien:

$$l = \frac{x - x'}{\varrho}, \quad m = \frac{y - y'}{\varrho}, \quad n = \frac{z - z'}{\varrho}$$

die Richtungscosinus von ϱ, dieses von $d\tau$ gegen den Aufpunkt hin gezogen, und:

$$\lambda = \frac{dx'}{ds'}, \quad \mu = \frac{dy'}{ds'}, \quad \nu = \frac{dz'}{ds'}$$

die Richtungscosinus von ds', letzteres in der positiven Stromrichtung gezogen. Dann ist:

$$d\tau = \sigma\, ds', \quad p = \frac{i'\lambda}{\sigma}, \quad q = \frac{i'\mu}{\sigma}, \quad r = \frac{i'\nu}{\sigma}.$$

Wir sahen, dass bei Anwendung des anderen, zum Schluss des § 7 erwähnten Maasssystems $p = p_h . h$, $q = q_h . h$, $r = r_h . h$ ist. Bezeichnen wir die in jenem anderen Maasssysteme gemessene Elektricitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt geht, also die in jenem anderen Maasssysteme gemessene Stromstärke mit i_h, so ist also auch:

81) $$i = i_h . h.$$

Wir erhalten zunächst bei Anwendung des elektrostatischen Maasses nach Formel 78:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\mathfrak{V}} \int \frac{i'\, ds'}{\varrho^2} (m\nu - n\mu) = \frac{1}{\mathfrak{V}} \int \frac{i'}{\varrho^3} [(y - y')dz' - (z - z')dy'].$$

Dabei ist α_1 die Kraft, welche auf einen Magnetpol von der Intensität 1 in der Abscissenrichtung wirkt.

Wir haben also in dem Bilde weiter anzunehmen, dass jedes Stromelement ds' auf die Einheit des Magnetismus eine Kraft ausübt, die senkrecht steht auf der Ebene ϱ, ds' und deren Intensität:

82) $$\frac{i' \, ds' \sin(\varrho, ds')}{\mathfrak{V} \varrho^2}$$

ist (vgl. I. Theil, Art. 90).

Diese Kraft ist unabhängig von der Natur des Körpers, in welchem sich das Stromelement und der Magnetpol befinden.

Substituiren wir in dem Ausdruck 82 den Werth 81, so folgt:

$$\frac{h \, . \, i_h' . \, ds' \sin(\varrho, ds')}{\mathfrak{V} \varrho^2} \, .$$

Man sagt, die Stromstärke ist in magnetischem Maasse gemessen, wenn sich dieser Ausdruck auf:

$$\frac{i' \, ds' \sin(\varrho, ds')}{\varrho^2}$$

reducirt. Um das magnetische Maass zu erhalten, muss man also in den mit h bezeichneten Formeln des § 7 die Grösse h gleich $\mathfrak{V}$, d. i. der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in der Luft setzen. Die magnetische Einheit der Elektricität E_m dividirt durch die elektrostatische E_s, beide in Luft gemessen, giebt:

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{\sqrt{K_l \mu_l}} \, ,$$

also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in Luft. Hieraus folgt, dass die Zahl i_s oder e_s, welche eine Stromstärke, resp. Elektricitätsmenge im elektrostatischen Maasse ausdrückt, dividirt durch die Zahl i_m oder e_m, welche dieselbe Stromstärke, resp. Elektricitätsmenge im magnetischen Maasse ausdrückt, gleich $3 \, . \, 10^{10}$ ist und dass die Dimensionen der magnetisch gemessenen Elektricitätsmenge gleich denen der elektrostatisch gemessenen dividirt durch eine Geschwindigkeit sind.

Was die Richtung der Kraft, die das Stromelement auf den Magnetpol ausübt, anbelangt, so ist sie die der positiven x-Axe, wenn sich das Stromelement im Coordinatenursprung befindet und die Richtung der positiven z-Axe hat, während der Magnetpol auf der positiven y-Axe liegt. Es wird also in der That positiver Magnetismus nach der Linken des Ampère'schen Schwimmers abgelenkt, sobald man die

positive Abscissenaxe von uns aus nach rechts, die positive y-Axe nach hinten, die positive z-Axe nach oben zieht. Auf der Schultafel geht daher die positive x-Axe von der Linken gegen die Rechte der Zuhörer, die positive y-Axe von der Tafel gegen das Auditorium, die positive z-Axe nach oben. (Französisches Coordinatensystem, Hopfencoordinatensystem). für ein Auge, das sich dort befindet, wohin die positive x-Axe zeigt, gelangt man im Sinne des Uhrzeigers auf kürzestem Wege von der $+y$- zur $+z$-Axe.) Für das durch das Spiegelbild dargestellte Coordinatensystem müssten entweder alle sechs Ausdrücke, welche die Form haben:

$$\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}$$

in den Grundgleichungen das entgegengesetzte Zeichen erhalten, oder es müsste, sei es freier und wahrer Magnetismus, sei es freie und wahre Elektricität, aber nicht alle vier gleichzeitig, entgegengesetzt bezeichnet werden.

Zehnte Vorlesung.

§ 21. Magnetische Kräfte eines Elementarstromes und eines Solenoides.

Wir wollen nun die Werthe von α, β, γ berechnen, welche durch einen sehr kleinen ebenen elektrischen Strom an irgend einer Stelle des Raumes (dem Aufpunkt) bedingt werden, und welche wir, falls wir wahren Magnetismus zugeben, als die Kräfte ansprechen können, die der Strom auf einen im Aufpunkte befindlichen Nordpol 1 ausüben würde. Sei der Aufpunkt Coordinatenanfang und die xy-Ebene parallel der Stromebene; der Strom fliesse in dem Sinne, wie man von der $+x$-Axe auf kürzestem Wege zur $+y$-Axe gelangt, also von der $+z$-Seite aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers. Ferner sei O' ein Punkt der vom Strome umflossenen Fläche, die x-Coordinate dieses Punktes sei $\mathfrak{p}$, die y-Coordinate sei Null,

und die z-Coordinate $\mathfrak{q}$. $x' = \mathfrak{p} + \xi$, $y' = \eta$, $z' = \mathfrak{q}$ seien die Coordinaten eines Elementes ds' des Stromes. Dann wird:

$$\alpha_1 = \frac{3\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,f\,i_1}{\mathfrak{V}\,t^5} = -\frac{i_1 f}{\mathfrak{V}}\frac{d}{d\mathfrak{q}}\left(\frac{\mathfrak{p}}{t^3}\right)$$

$$\beta_1 = 0,$$

$$\gamma_1 = \frac{i_1 f}{\mathfrak{V}}\left(-\frac{1}{t^3} + \frac{3\,\mathfrak{q}^2}{t^5}\right) = -\frac{i_1 f}{\mathfrak{V}}\frac{d}{d\mathfrak{q}}\left(\frac{\mathfrak{q}}{t^3}\right).$$

f ist die vom Strome umflossene Fläche und $t = O\,O'$. Wir ziehen von O' eine Normale zum Stromkreise nach der Richtung, von wo aus gesehen der Strom im Sinne des Uhrzeigers fliesst, und schneiden darauf ein unendlich kleines Stück $O'\,O'' = \delta$ ab, ferner denken wir uns in O' die magnetische Masse:

83) $$m = \frac{i_1 f}{\mathfrak{V}\,\delta},$$

in O'' die gleiche, aber entgegengesetzt bezeichnete Masse. Dann sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Kräfte, welche diese beiden Massen auf eine magnetische Masse $+1$ im Aufpunkte ausüben würden, wenn $+m$ dieselbe mit der Kraft $m/O\,O'^2$ abstösse, $-m$ sie nach demselben Gesetze anzöge.

Dies gilt offenbar unabhängig von der Lage des Coordinatenursprungs. Sind daher nunmehr wieder x, y, z die Coordinaten des Aufpunktes M, und bezeichnet man mit:

84) $$\psi = \frac{m}{O'\,M} - \frac{m}{O''\,M}$$

das Potential der Massen $+m$ und $-m$ auf derselben, so ist:

85) $$\alpha_1 = -\frac{d\psi}{dx}, \quad \beta_1 = -\frac{d\psi}{dy}, \quad \gamma_1 = -\frac{d\psi}{dz}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass:

$$\omega = \frac{f}{\delta}\left(\frac{1}{O'\,M} - \frac{1}{O''M}\right)$$

der Gesichtswinkel ist, unter dem von M aus gesehen der Stromkreis erscheint, daher kann man schreiben:

$$\psi = \frac{i_1\,\omega}{\mathfrak{V}}.$$

ω ist positiv, wenn für ein in M befindliches Auge der Strom dem Uhrzeiger entgegenfliesst. ω ist gewissermaassen die Anzahl der Sehstrahlen, die von der Seite, wo der Strom dem

Uhrzeiger entgegenfliesst nach der anderen durch den Strom hindurchgehen. Hat man statt eines kleinen ebenen Stromes eine Reihe gleicher, äquidistanter, perlschnurartig angeordneter Ströme, ein Solenoid, wo N Ströme auf die Längeneinheit entfallen, so kann man setzen: $\delta = 1/N$. Denkt man sich dann an demjenigen (dem positiven) Ende O' des Solenoid, wo für den ausserhalb desselben stehenden Beschauer der Strom dem Uhrzeiger entgegenfliesst[1]), die magnetische Masse $+m$, am andern Ende Ω die Masse $-m$, wobei wieder $m = i' f N / \mathfrak{V}$ ist, bezeichnet man ferner den Aufpunkt wieder mit M und setzt:

86)
$$\psi = m\left(\frac{1}{O'M} - \frac{1}{\Omega M}\right),$$

so ist wieder im Punkte M:

$$\alpha_1 = -\frac{d\psi}{dx}, \quad \beta_1 = -\frac{d\psi}{dy}, \quad \gamma_1 = -\frac{d\psi}{dz}.$$

Alle diese Formeln gelten, da die hier gebrauchte Magnetismenge m bloss zur geometrischen Deutung diente, auch unverändert, wenn η_w gleich Null ist; nur dass dann wieder bezüglich der physikalischen Bedeutung von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ auf später verwiesen werden muss.

Wir setzen voraus, dass das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes und das Flächenprincip für die ponderabeln Körper allein gilt, als ob kein Aether vorhanden wäre, dass also der Aether weder ein erhebliches Moment fortschreitender, noch rotirender Bewegung erhält.

Nach diesem Princip, welches wir das Princip der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung der ponderablen Körper nennen wollen, muss im leeren Raume, in Luft und in allen Körpern, welche die Wirkung der elektrischen und magneti-

---

[1]) Da es üblich ist, den Nordmagnetismus als den positiven zu bezeichnen, so behalten wir in diesem einen Punkte diese Festsetzung consequent bei, obwohl sie nicht zu unsern sonstigen passt; denn wir bezeichnen sonst die Seite, wo der Strom wie der Uhrzeiger zu fliessen scheint, als die positive. Bei Anwendung des englischen (Wein-) Coordinatensystems würde sie zu den übrigen passen, doch ist dann der Uebelstand, dass, wenn die x-Axe nach rechts (also wie wir schreiben) in der Tafel und die xy-Ebene, wie es für die Darstellung von Flächen bequem ist, horizontal gelegt wird, der Zuschauer, wenn er vor der Tafel steht, nicht in den durchaus positiven Raumoctanten kommt.

schen Kräfte nicht erheblich beeinflussen, für die scheinbaren Fernkräfte Wirkung gleich Gegenwirkung sein.

Wenn wir daher auch nicht behaupten können, dass jeder Magnetpol m' auf jedes Stromelement eine Kraft ausübt, welche dem m'-fachen der durch Gleichung 82 bestimmten gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist, so muss doch die Gesammtkraft, welche wahre Magnetismen, falls deren Existenz angenommen wird, auf einen geschlossenen Strom ausüben, immer dieselbe sein, als ob jenes der Fall wäre. Ebenso muss in dem zuletzt betrachteten Falle der Magnetpol m', dessen Coordinaten x, y, z seien, auf ein in der Entfernung ϱ befindliches positives Solenoidende mit den Coordinaten x', y', z' Kräfte ausüben, deren Componenten in den Coordinatenrichtungen sind:

$$\frac{i' f N(x'-x)}{\mathfrak{V}\varrho^3}, \quad \frac{i' f N(y'-y)}{\mathfrak{V}\varrho^3}, \quad \frac{i' f N(z'-z)}{\mathfrak{V}\varrho^3}.$$

Die Kraft ist also dieselbe, als ob das Solenoidende ein Magnetpol von der Intensität $i' f N M/\mathfrak{V} = i'_m f N M$ wäre, wobei i' die im elektrostatischen, i'_m die im elektromagnetischen Maasse gemessene Stromintensität ist.

§ 22. Magnetische Kräfte eines beliebigen Stromes aus denen eines Elementarstromes berechnet.

Um die Werthe α, β, γ, die durch einen beliebigen geschlossenen Strom von der elektrostatisch gemessenen Intensität i bedingt werden, zu finden, construiren wir eine beliebige Fläche F, welche rings von dem geschlossenen Strome umgrenzt wird, und darauf in bekannter Weise unendlich viele, unendlich kleine geschlossene Strömchen, die sich im Innern der Fläche überall aufheben, an deren Rande aber zum gegebenen elektrischen Strome vereinigen. Jedes dieser Strömchen können wir durch einen Nordpol in dessen Inneren und einen Südpol in der Distanz δ in der positiven Normalenrichtung davon entfernt ersetzen; alle zusammen, folglich auch den ganzen ursprünglich gegebenen Strom also dadurch, dass wir die Fläche F gleichmässig mit Nordmagnetismus und eine unendlich nahe, überall in der Distanz δ befindliche mit genau gleich viel Südmagnetismus belegt denken;

die Flächendichte des Magnetismus muss dabei $i/\mathfrak{V}\delta$ sein. ψ ist dann das Potential aller dieser Magnetismen auf die Magnetismusmenge Eins im Aufpunkt, wobei als Potential der Magnetismen m und m' der Ausdruck $m m'/\varrho$ ohne weiteren Faktor zu verstehen ist, und es ist:

$$\alpha = -\frac{d\psi}{dx}, \quad \beta = -\frac{d\psi}{dy}, \quad \gamma = -\frac{d\psi}{dz}.$$

Auch für die Giltigkeit dieser Formeln ist es vollkommen gleichgiltig, ob wir die Existenz von wahrem Magnetismus zugeben oder nicht; die hier fingirten Magnetismen sind ja nur geometrische Hilfsbegriffe für die Rechnung.

ψ kann auch als der mit der magnetischen Stromintensität $i_m = i/\mathfrak{V}$ multiplizirte Gesichtswinkel ω definirt werden, unter dem der geschlossene Strom vom Aufpunkt aus betrachtet erscheint. ω ist wie bei einem unendlich kleinen Strome mit positivem Zeichen zu nehmen, sobald der Strom vom Aufpunkt aus betrachtet dem Uhrzeiger entgegenfliesst, dagegen mit negativem, wenn er wie der Uhrzeiger fliesst, sobald der Zahlenwerth von ω kleiner als 2π ist.

Geben wir die Existenz von wahrem Magnetismus zu, so wirkt auf die wahre Magnetismusmenge m_w in der Abscissenrichtung die Kraft $\alpha . m_w$. Da von m_w nach allen Richtungen $4\pi m_w$ Kraftlinien ausgehen, so ist $\omega = Z/m_w$, wobei Z die Anzahl der Kraftlinien vorstellt, welche der Pol m_w durch den geschlossenen Strom hindurchsendet, und zwar von der Seite, von wo aus gesehen der Strom dem Uhrzeiger entgegenfliesst nach der anderen hin. Daher wird:

$$\psi = \frac{iZ}{m_w \mathfrak{V}}.$$

Die Kraft, welche auf die Magnetismusmenge m_w in der Abscissenrichtung wirkt, ist:

$$X = -m_w \frac{d\psi}{dx} = -\frac{i}{\mathfrak{V}} \frac{dZ}{dx}.$$

Würde der Strom im magnetischen Maass gemessen, so wäre:

$$X = -i_m \frac{dZ}{dx}.$$

Analoge Ausdrücke gelten für die Kräfte, welche in der Richtung der y- und z-Axe wirken. Die Arbeit, welche die

scheinbar auf den Magnetismus wirkenden Kräfte bei einer Bewegung desselben leisten, ist daher gleich der Abnahme der Grösse $iZ/\mathfrak{V}$.

Wären beliebig viele Magnetpole vorhanden, so wäre die Arbeit bei einer beliebigen Bewegung derselben

$$\delta A = -\frac{i}{\mathfrak{V}}\delta \Sigma Z, \tag{87}$$

wobei ΣZ die Gesammtzahl der Kraftlinien ist, welche alle Magnetpole durch den Stromkreis schicken; $\delta \Sigma Z$ ist der Zuwachs von ΣZ.

Nach dem oben erwähnten Principe der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung ist auch umgekehrt bei einer Lagenänderung des Stromkreises die Arbeit der scheinbar auf ihn wirkenden Kräfte durch die Formel 87 gegeben. Eine Deformation des Stromkreises müsste man sich dabei durch eine Verschiebung mehrerer Stromkreise ersetzt denken, welche sich, wie die früher benutzten Elementarströmchen, an allen Stellen, wo sie nicht mit dem ursprünglich gegebenen Strome zusammenfallen, aufheben. Der Zuwachs der letzteren Grösse stellt auch dann noch die Arbeit der scheinbar auf den Stromkreis wirkenden Fernkräfte dar, wenn die Kraftlinien von anderen Strömen herrühren, da ja für die Kräfte, welche auf den Stromkreis wirken, wieder nur der Zustand der unmittelbar benachbarten Partien des Aethers maassgebend ist, gleichgiltig, woher α, β, γ stammen.

Die Anzahl der Kraftlinien, welche durch einen geschlossenen Stromkreis gehen, ist:

$$\Sigma Z = \int M d o \left[\alpha \cos(n x) + \beta \cos(n y) + \gamma \cos(n z)\right],$$

wobei do wieder ein Flächenelement einer beliebigen, durch den Strom begrenzten Fläche F, n die in der Richtung, in welcher die Kraftlinien durch die Fläche hindurchgehen, gezogene Normale ist. Diese Formel ist natürlich wieder davon unabhängig, ob man wahren Magnetismus annimmt oder nicht.

Wird das Feld speciell durch einen zweiten geschlossenen Strom S' mit der Intensität i' erzeugt, stammen also α, β, γ von diesem her, so ist nach der Formel 78:

$$\alpha = \frac{1}{\mathfrak{V}}\left(\frac{d\bar{q}}{dz} - \frac{d\bar{r}}{dy}\right),$$

und wenn M constant ist, wird nach dem Stokes'schen Satze (vgl. 1. Th., Art. 76):

$$\Sigma Z = -\frac{M}{\mathfrak{B}}\int ds\,(\bar{p}\,\lambda + \bar{q}\,\mu + \bar{r}\,\nu),$$

wobei ds ein Linienelement des ersten Stromkreises, λ, μ, ν dessen Richtungscosinus sind.

Bezeichnet man mit ds' ein Linienelement des zweiten Stromkreises S', mit λ', μ', ν' dessen Richtungscosinus, und mit ϱ die Entfernung zwischen ds und ds', so ist:

$$\bar{p} = i'\int\frac{\lambda'\,ds'}{\varrho}, \quad \bar{q} = i'\int\frac{\mu'\,ds'}{\varrho}, \quad \bar{r} = i'\int\frac{\nu'\,ds'}{\varrho},$$

$$\Sigma Z = -\frac{M i'}{\mathfrak{B}}\iint\frac{\sigma\,ds\,ds'}{\varrho},$$

wobei $\sigma = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'$ der Winkel der beiden Elemente ds und ds' ist.

Die Arbeit, welche die scheinbar zwischen den Stromkreisen wirkenden Fernkräfte leisten, ist also gleich dem Zuwachse der Grösse:

88) $$-\frac{i}{\mathfrak{B}}\Sigma Z = \frac{i\,i'\,M}{\mathfrak{B}^2}\iint\frac{\sigma\,ds\,ds'}{\varrho}.$$

Wenn dieser Zuwachs positiv ist, heisst dies, dass die Verschiebung in der Richtung stattfindet, in welcher die scheinbaren Fernkräfte wirken. Für das magnetische Maass der Stromintensität tritt wieder an Stelle des Faktors $1/\mathfrak{B}^2$ die Einheit.

Die Kräfte, welche gleiche Ströme in verschiedene Flüssigkeiten getaucht auf einander ausüben, sind dem M derselben direkt proportional, wenn im Innern der Drähte durch die Ströme kein freier Magnetismus erregt wird, also das M im Innern der stromführenden Drähte ohne Einfluss ist. Letzteres könnte eintreten, wenn der stromführende Draht ein dicker Eisendraht wäre, der sich an gewissen Stellen selbst solenoidartig umschlingen würde.

Wir sahen, dass die Wirkung wahrer Magnetismen in verschiedenen Flüssigkeiten dem M verkehrt proportional ist. Die von Strömen auf wahre Magnetismen aber ist von M un-

abhängig. Ueber die Ableitung des Ampère'schen Gesetzes aus dem Ausdrucke 88 vgl. I. Th., Art. 92.

Wäre M variabel, so kämen dazu noch die Kräfte, die von den Magnetismen herrühren, welche durch die von diesen Strömen erzeugte magnetische Polarisation dort frei werden, wo M variabel ist, oder einen plötzlichen Sprung macht.

Elfte Vorlesung.

§ 23. Magnetische Energie des Feldes.

Wir wollen nun noch den Ausdruck für die Energie des Feldes aufsuchen, welche durch das Zusammensein von elektrischen Strömen mit anderen, oder, falls wir wahren Magnetismus zugeben, auch mit wahren Magnetismen bedingt ist. Zu diesem Zwecke stellen wir uns folgendes Problem. Wir haben ein beliebiges Magnetfeld, welches durch beliebige andere stationäre Ströme, vielleicht auch durch wahre Magnetismen, wenn wir deren Existenz zugeben, hervorgerufen ist. Vermöge dieser Ursachen sollen in einem Aufpunkte mit den Coordinaten x, y, z die Grössen α, β, γ bestimmte Werthe haben, die wir einfach ohne jeden Index bezeichnen. In dieses Feld soll ausserdem noch ein geschlossener linearer elektrischer Strom S von der Intensität i gebracht werden. Wäre er allein vorhanden, so würden α, β, γ im Aufpunkte die Werthe haben:

$$\alpha_1 = -\frac{d\psi}{dx}, \quad \beta_1 = -\frac{d\psi}{dy}, \quad \gamma_1 = -\frac{d\psi}{dz},$$

wobei $\psi = i\omega/\mathfrak{V}$ und ω ganz wie früher der Gesichtswinkel ist, unter dem der Stromkreis vom Aufpunkte aus betrachtet erscheint; das Zeichen von ω bestimmt sich wie dort. Die gesammte Energie des Feldes ist nach Formel B:

$$V = \int \frac{M}{8\pi}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,d\tau + \int \frac{M}{8\pi}(\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2)\,d\tau$$
$$+ \int \frac{M}{4\pi}(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)\,d\tau.$$

Wenn weder das Feld noch der Strom verändert wird, sondern bloss der letztere sich im Felde bewegt, so ändern sich die beiden ersten Integrale rechts nicht, sondern bloss das dritte, welches wir mit $i . \Omega$ bezeichnen wollen.

Die Funktion ψ, deren negativen Ableitungen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sind, ist mehrdeutig, da durch den Stromkreis der unendliche Raum zweifach zusammenhängend geworden ist. Sie wird eindeutig, wenn wir den Raum durch eine beliebige Fläche F, welche vom Stromkreise umrandet wird, durchschneiden. Dann liefert die partielle Integration:

$$\Omega = \frac{1}{4\pi\mathfrak{V}}\int d\,o\, M[\alpha\cos(nx) + \beta\cos(ny) + \gamma\cos(nz)](\omega_2 - \omega_1)$$
$$+ \frac{1}{4\pi\mathfrak{V}}\int \omega\, d\tau \left[\frac{d(M\alpha)}{dx} + \frac{d(M\beta)}{dy} + \frac{d(M\gamma)}{dz}\right].$$

Dabei ist $d\,o$ ein Flächenelement der Fläche F, n dessen Normale, ω_2 der Werth von ω unmittelbar an $d\,o$ auf der positiven, ω_1 auf der negativen Seite der Normalen. Ziehen wir daher die Normale nach jener Richtung hin, wo sich das Auge befinden muss, damit der positive Strom wie der Uhrzeiger fliesst, so ist $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = -2\pi$, und ω nimmt ab, wenn man sich von der negativen Seite der Normalen aussen um den Strom herum, ohne die Fläche F zu durchsetzen, bis zur positiven begiebt. Daher ist $\omega_2 - \omega_1 = -4\pi$, und wir erhalten:

$$\Omega = -\frac{1}{\mathfrak{V}}\int M\,d\,o\,[\alpha\cos(nx) + \beta\cos(ny) + \gamma\cos(nz)]$$
$$+ \frac{1}{4\pi\mathfrak{V}}\int \omega\, d\tau \left[\frac{d(M\alpha)}{dx} + \frac{d(M\beta)}{dy} + \frac{d(M\gamma)}{dz}\right].$$

Hier ist:

89) $\int M\,d\,o\,[\alpha\cos(nx) + \beta\cos(ny) + \gamma\cos(nz)] = \Sigma Z$

die Anzahl der Kraftlinien, welche durch die Fläche F von der negativen gegen die positive Normalenseite hindurchgehen. Ist nun das Feld nicht durch andere Ströme, sondern bloss durch wahre Magnetismen erzeugt, so sitzt in jedem Volumelemente $d\tau$, wo der Ausdruck:

$$\left[\frac{d(M\alpha)}{dx} + \frac{d(M\beta)}{dy} + \frac{d(M\gamma)}{dz}\right]$$

nicht verschwindet, die wahre Magnetismusmenge:

$$\frac{d\tau}{4\pi}\left[\frac{d(M\alpha)}{dx}+\frac{d(M\beta)}{dy}+\frac{d(M\gamma)}{dz}\right],$$

von welcher

$$d\tau\left[\frac{d(M\alpha)}{dx}+\frac{d(M\beta)}{dy}+\frac{d(M\gamma)}{dz}\right]$$

Kraftlinien ausgehen.

$$\frac{1}{4\pi}\int\omega\, d\tau\left[\frac{d(M\alpha)}{dx}+\frac{d(M\beta)}{dy}+\frac{d(M\gamma)}{dz}\right]$$

ist daher die Zahl der Kraftlinien, welche alle wahren Magnetismen durch die Fläche F hindurchschicken, und zwar von der Seite, wo der Strom dem Uhrzeiger entgegenfliesst, nach der anderen hin, also von der negativen gegen die positive Normalenseite. Dieser Ausdruck muss daher dem Ausdrucke 89 gleich sein, da er dieselbe Anzahl von Kraftlinien darstellt. Hieraus folgt $\Omega = 0$. Dem Zusammensein eines Stromes mit wahrem Magnetismus entspricht daher keine Energie des Feldes. Werden ein elektrischer Strom von unveränderlicher Intensität und wahre Magnetismen gegen einander bewegt, so wird die hierzu erforderliche Arbeit nicht dem Energievorrathe des Mediums entnommen, resp. kommt ihr zugute, sondern der Energiequelle, welche den elektrischen Strom treibt. Sind dagegen keine wahren Magnetismen vorhanden, so wird

$$90)\quad \begin{cases} i\,\Omega = -\dfrac{i}{\mathfrak{V}}\displaystyle\int M\,do\,[\alpha\cos(nx)+\beta\cos(ny)+\gamma\cos(nz)] \\ \quad = -\dfrac{i}{\mathfrak{V}}\Sigma Z \end{cases}$$

(vgl. Formel 89).

Die Arbeit der Kräfte, welche von Strömen scheinbar auf Magnete ausgeübt werden, ist bei Bewegung der letzteren nach Formel 87 gleich der Abnahme der Grösse $i\Sigma Z/\mathfrak{V}$. Dieselbe Grösse giebt daher umgekehrt die Arbeit bei Bewegung der Ströme im Felde, und zwar nicht bloss, wenn dieses durch wahre Magnetismen, sondern auch, wenn dasselbe Feld durch andere Ströme erzeugt wird. Werden daher Ströme relativ gegen einander bewegt, so wächst die Energie des Mediums um einen Betrag, der genau gleich der Arbeit der Kräfte ist, welche diese scheinbar aufeinander ausüben. Letztere Arbeit ist aber wieder dem Zuwachs der sichtbaren lebendigen Kraft

(oder Arbeit) gleich. Daher muss jetzt den elektromotorischen Kräften, welche die Ströme treiben, doppelt so viel Energie entnommen werden. Die Hälfte kommt sichtbar zum Vorschein, die andere Hälfte wird in unsichtbare Aetherenergie verwandelt.

Bei zwei nahen gleichlaufenden kreisförmigen Strömen z. B. gehen die Kraftlinien des einen in negativer Richtung durch den andern. Werden beide Ströme einander genähert, so nimmt der Absolutwerth von ΣZ zu, mit Rücksicht auf das Zeichen nimmt also ΣZ ab, demnach die Mediumenergie nach Formel 90 zu. Aber auch die sichtbare Energie nimmt zu; die Ströme bewegen sich mit Beschleunigung gegeneinander oder leisten sichtbare Arbeit. Beide Energiezuwächse müssen von den elektromotorischen Kräften bestritten werden, welche die Ströme treiben. Werden deren Intensitäten constant erhalten und sind ausserdem keine anderen sichtbaren Bewegungen vorhanden, so haben diese elektromotorischen Kräfte keine Energie zu bestreiten ausser diesen Energiezuwächsen und der Joule'schen Wärme.

Man sieht daraus, dass die Berechnung der ponderomotorischen Kräfte aus der Energie des Mediums nur dann gestattet ist, wenn, wie in der Elektrostatik und bei der Wechselwirkung wahrer Magnetismen, keine andere Energiequelle vorhanden ist.

§ 24. Ableitung der magnetischen Erscheinungen, ohne die Annahme der Existenz von wahren Magnetismen.

Wir sind in der Ableitung aller dieser bekannten Lehrsätze wesentlich dem Ideengange Hertz' gefolgt. Diese Beweisführung ist ohne Zweifel richtig, giebt aber kaum einen klaren Einblick in den inneren Zusammenhang. Vollkommen erschöpfend kann die Theorie der ponderomotorischen Kräfte natürlich erst in der Elektrodynamik bewegter Körper gleichzeitig mit der Elektrostriction im allgemeinsten Sinne des Wortes, d. h. der Lehre von den Druckkräften und den Deformationen, welche durch elektrische und magnetische Kräfte entstehen, behandelt werden.

Doch will ich schon hier darauf hinweisen, welch tiefen

Einblick in den inneren Zusammenhang dieser Thatsachen Maxwell's mechanisches Modell gewährt, und zwar will ich mich dabei der Form bedienen, die ich dem Modelle im I. Theile dieser Vorlesungen gab.

Die Kräfte, welche an den beiden Kurbeln der Fig. 4 der vierten Vorlesung daselbst, oder besser an den beiden Riemenscheiben des Apparates auf Tafel II wirken, stellen die beiden elektromotorischen Kräfte dar, welche die beiden Ströme treiben. Der einfachste Fall ist der, dass beide Ströme parallel, gleich stark und entgegengesetzt gerichtet sind. Dann dreht sich das Rohr, welches die mittlere Masse m_3 trägt, nicht. Bei ungeändertem Selbstinductionscoefficienten der beiden Stromkreise bedingt eine Vergrösserung der Entfernungen r_1 und r_2 der beiden anderen Massen m_1 und m_2 von der Axe eine Annäherung von m_3, also Verkleinerung des wechselseitigen Inductionscoëfficienten, entspricht also einer Entfernung der beiden parallelen, entgegengesetzt gerichteten Ströme von einander. Dabei wird von der scheinbaren Abstossung derselben Arbeit geleistet.

Gerade so werden im Modell die Fäden, welche an m_1 und m_2 befestigt sind und z. B. durch Gewichte gespannt sein können, hineingezogen, also die Gewichte, welche sichtbare ponderable Massen darstellen, gehoben, oder ihre lebendige Kraft erhöht. Die elementarste Ueberlegung zeigt nun, dass auch im Modelle, wenn man die Winkelgeschwindigkeiten, welche die Stromstärken darstellen, constant erhält, die Kräfte, welche die Kurbeln treiben, doppelt so viel Arbeit leisten, als zur Hebung der Gewichte nothwendig ist. Die andere Hälfte derselben wird zur Erhöhung der lebendigen Kraft der Massen m_1 und m_2 verwendet, was der unsichtbaren lebendigen Kraft des Aethers entspricht. Diese eine Uebereinstimmung genügt, um die Vorzüge einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen zu zeigen.

Auch nach der hier in der ersten Vorlesung besprochenen mechanischen Hypothese sind stationäre elektrische Ströme cyklische Bewegungen. Die Intensitäten zweier solcher elektrischen Ströme sind durch die Aenderungsgeschwindigkeiten

$$\frac{dq_1}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dq_2}{dt}$$

zweier cyklischer Coordinaten q_1 und q_2 bestimmbar. Die Grösse V der ersten Vorlesung dieses Buches (Gleichung B) ist zwar als potentielle Energie gedacht, kann aber doch in folgender Form dargestellt werden:

$$\frac{A}{2}\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \frac{B}{2}\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + C\frac{dq_1}{dt}\frac{dq_2}{dt},$$

wobei A, B, C Funktionen der langsamen veränderlichen Parameter sind. Daher gilt dasselbe Princip auch hier, und es folgt, dass die Arbeit der scheinbaren Fernkräfte bei Bewegung zweier Ströme ohne Intensitätsänderung gleich dem Zuwachse der durch sie bedingten Mediumenergie ist.

Für diese Mediumenergie fanden wir aber bereits die Ausdrücke 90 und 88, welche auch gelten, wenn man die Möglichkeit wahren Magnetismus vollständig leugnet, was wir jetzt thun müssen, da er mit den mechanischen Vorstellungen der ersten Vorlesung unverträglich ist.

Der Zuwachs der Energie 88 ist daher die von den scheinbaren Fernkräften geleistete Arbeit. Hieraus folgen ohne Weiteres sämmtliche Formeln für die Wechselwirkung zweier geschlossener Ströme, und zwar werden diese zuerst bewiesen, bevor noch vom Magnetismus die Rede ist. Man sieht auch, dass diese Wechselwirkung dem M proportional ist und gelangt auch schon zum magnetischen Strommaasse, ohne noch vom Magnetismus etwas zu wissen, da für das Standardmedium, wo $M = 1$ ist, der Coëfficient des Doppelintegrals in Formel 88 die einfache Form $i_m i_m'$ annimmt, wenn $i = i_m \mathfrak{V}$, $i' = i_m \mathfrak{V}$ gesetzt wird.

Ist einer der beiden Ströme ein Solenoid, dessen negativer Pol im Unendlichen liegt, so haben gemäss den Gleichungen 85 und 86), deren Gültigkeit ebenfalls von der Annahme der Existenz von wahrem Magnetismus unabhängig ist, die Grössen α, β, γ, welche in einem Punkte mit den Coordinaten x, y, z in der Entfernung ϱ von dem positiven, im Endlichen liegenden Solenoidpole erzeugt werden, die Werthe

$$\alpha = -\frac{i_1 f N}{\mathfrak{V}} \frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{dx}$$

und analog β und γ. Lässt man daher vom Solenoidpole nach

allen Richtungen gleichförmig $\mathfrak{z} = 4\pi i_1 f M N / \mathfrak{V}$ Kraftlinien ausgehen, so ist die Zahl derjenigen, die normal durch die Flächeneinheit gehen, immer gleich der Grösse des Vektors

$$M\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Die gesammte Energie $i.\Omega$, die also durch das Zusammensein des Solenoidpoles mit einem beliebigen elektrischen Strome von der Intensität i bedingt wird, ist nach Formel 90

$$i\,\Omega = -\frac{i}{\mathfrak{V}}\int M d o [\alpha \cos(nx) + \beta \cos(ny) + \gamma \cos(nz)].$$

Dies ist aber, wenn wir wieder M als constant voraussetzen, gleich der mit $-i/\mathfrak{V}$ multiplicirten Zahl Z der Kraftlinien, welche von dem Solenoidpole durch den geschlossenen elektrischen Strom hindurchgeschickt werden. Ist ω der Gesichtswinkel, unter welchem der Strom vom Solenoidpol aus gesehen erscheint, so ist

$$Z = \mathfrak{z}\frac{\omega}{4\pi} = \frac{i_1 f N M}{\mathfrak{V}}\omega,$$

daher ist

$$i\,\Omega = -\frac{i\,\omega M i_1 f N}{\mathfrak{V}^2}.$$

Da dies die durch das Zusammensein des Stroms und Solenoidpols bedingte Energie ist, so entspricht es der Grösse, die wir im I. Theil, Art. 37, mit $l_1' l_2' C$, Art. 68 mit $I\,J(s)$ bezeichneten; ihr negativer Differentialquotient nach irgend einer Coordinate ist nach dem allgemeinen Princip des I. Theiles dieser Vorlesungen gleich der Kraft, welche erforderlich ist, um jene Coordinate constant zu erhalten. Derselbe Differentialquotient, aber ohne Zeichenumkehr, liefert daher die Kraft, welche vermöge des Zusammenwirkens des Stromes und des Solenoidpoles diese Coordinate zu vergrössern strebt. Genau dieselben Ausdrücke stellten früher unter der Annahme der Existenz von wahrem Magnetismus die Kräfte dar, welche ein Strom von der Intensität i und ein Magnetpol von der Intensität $i_1 f N M/\mathfrak{V}$ auf einander ausüben, ersterer im elektrostatischen, letzterer im magnetischen Maasse gemessen.

Es hat jetzt gar keine Schwierigkeit, auch noch nachzuweisen, dass zwei Solenoidenden wie Magnetpole auf einander wirken, und zwar, wenn die Stromintentensität elektrostatisch

gemessen wird, wie solche von der Stärke $ifNM/\mathfrak{V}$, resp. $i_1 f_1 N_1 M/\mathfrak{V}$ im magnetischen Maasse gemessen.

Man kann daher auch sämmtliche magnetische Erscheinungen erklären, wenn man, wie es in consequenter Verfolgung der mechanischen Anschauung der ersten Vorlesung geschehen muss, jeden wahren Magnetismus leugnet, und die permanenten Magnete durch Solenoide ersetzt. Zwei Unterschiede scheinen freilich noch zu bestehen. Erstens leisten bei Bewegungen beliebiger Ströme oder Solenoide deren elektromotorischen Kräfte immer die doppelte Arbeit, als zu ihrer Bewegung erforderlich ist, was nicht mehr richtig ist, wenn Ströme auf Magnete oder Magnete auf einander wirken. Dies erklärt sich folgendermaassen: Wenn ein Strom auf einen Magnet wirkt, so muss man die elektromotorischen Kräfte, welche die Molekularströme im letzteren treiben, zu den unbekannten Molekularkräften rechnen. Die Energie, welche ihnen entnommen wird, stammt also nicht aus sichtbaren Quellen, sondern ist so zu betrachten, als ob sie der Molekularenergie des Mediums entnommen würde. Wenn daher durch Bewegung eines Stromes und eines Magnets gegen einander eine sichtbare Arbeit Q_1 geleistet wird, so leistet die elektromotorische Kraft des Stromes eine Arbeit Q_2, die genau gleich Q_1 ist, und auch die elektromotorischen Kräfte, welche die molekularen Ströme treiben, leisten nochmals dieselbe Arbeit Q_3, wenn diese Molekularströme constant bleiben sollen. Daraus entsteht die sichtbare Arbeit Q_1 und ein gleicher Betrag Q_4 von Energie des Mediums. Es ist also $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4$. Da aber die Arbeit Q_3 der elektromotorischen Kräfte der Molekularströme der Energie des Mediums entnommen wird und Q_4 dieser wieder zugute kommt, so kann man es so ansehen, als ob nur die elektromotorische Kraft des Stromes die sichtbare Arbeit Q_1 geleistet hätte, und die Mediumenergie unverändert geblieben wäre. Wenn zwei Magnete auf einander wirken, so wird alle Arbeit der Mediumenergie entnommen, da sichtbare elektromotorische Kräfte nicht vorhanden sind.

Zweitens, wenn unveränderliche Magnete einmal in eine bestimmte, dann in eine andere magnetisirbare Flüssigkeit tauchen, so sind die Kräfte, welche sie in jeder Flüssigkeit auf einander ausüben, dem Werthe des M der betreffenden

Flüssigkeit verkehrt proportional. Die Kräfte von Solenoiden dagegen sind in gleichem Falle dem M direkt proportional. Dies erklärt sich folgendermaassen: Die letztere Behauptung ist, wie wir sahen, nur richtig, wenn sowohl in der ersten als auch in der zweiten Flüssigkeit M an allen Stellen des Raumes denselben Werth hat, also der Werth des M im Innern des Drahtes ohne Einfluss ist. Diese Behauptung trifft daher nur zu, wenn auch der Raum zwischen und innerhalb der Solenoidwindungen jedesmal von derselben Flüssigkeit wie der äussere Raum erfüllt ist. Diese Bedingung ist aber bei den Molekularströmen der Stahlmagnete keineswegs realisirt. Vgl. hierüber Wied. Ann. Bd. 48, S. 100, 1893, wo ich noch ausführlicher erwiesen habe, dass unter gewissen Voraussetzungen alle wesentlichen Eigenschaften der Stahlmagnete, auch wenn man von jedem wahren Magnetismus absieht, auf dem Boden der Maxwell'schen Theorie vollkommen erklärt werden können.

Zwölfte Vorlesung.

§ 25. Fernwirkungsgleichungen.

Wir sind mit der Betrachtung aller Erscheinungen zu Ende, zu deren Erklärung der bisherige Grad der Annäherung in der Rechnung ausreicht. Bei der Berechnung der Erscheinungen der inducirten elektrischen Ströme, welche ebenfalls noch in der alten Elektricitätstheorie behandelt zu werden pflegen, müssen wir bereits in der Reihenentwickelung ein weiteres Glied berücksichtigen. Dies geschieht am besten, indem man zuerst die allgemeinen Formeln C und D, in denen gar nichts vernachlässigt ist, in eine andere Form bringt. Wir erhalten zunächst aus den completen Gleichungen D:

$$\Delta P = \frac{1}{\mathfrak{V}} \frac{d}{dt} \left[\frac{d(M\beta)}{dz} - \frac{d(M\gamma)}{dy} \right] + \frac{d}{dx}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right).$$

Wir wollen wie früher (Gleichung 36 und 37) setzen:

$$36\text{f})\quad \varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{d\tau}{\varrho} \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right) = \frac{1}{4\pi} \overline{\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right)},$$



wo auch die Flächenelemente von Trennungsflächen in die Integration einzubeziehen, letztere daher als Volumina von sehr geringerer Dicke zu betrachten sind. Analog setzen wir zur Abkürzung:

$$\overline{M\alpha} = \int \frac{M\alpha\, d\tau}{\varrho}, \quad \overline{M\beta} = \int \frac{M\beta\, d\tau}{\varrho}, \quad \overline{M\gamma} = \int \frac{M\gamma\, d\tau}{\varrho}.$$

Dann wird

$$\Delta) \qquad P = -\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{4\pi\mathfrak{V}}\frac{d}{dt}\left[\frac{d\overline{M\gamma}}{dy} + \frac{d\overline{M\beta}}{dz}\right]^{1)}$$

und analoge Gleichungen gelten für Q und R.

Diese Gleichungen zeigen, dass, wenn sich die magnetischen Polarisationen rasch genug ändern, P, Q, R nicht mehr die partiellen Ableitungen einer und derselben Grösse nach den Coordinaten sind, und zwar sind die Zusatzglieder, welche rasch veränderliche magnetische Polarisationen zu den elektrischen Kräften P, Q und R liefern, dieselben, welche elektrische Ströme zu den magnetischen Kräften α, β, γ liefern. Unser Bild muss daher durch die Annahme ergänzt werden, dass veränderliche Magnete und magnetische Polarisationen auf Elektricitätsmengen und auch gegenseitig auf einander ganz analoge Kräfte wie elektrische Ströme auf Magnetpole resp. gegenseitig aufeinander ausüben.

Behandeln wir die Gleichungen C wie früher die Gleichungen D, ohne irgend etwas zu vernachlässigen, so erhalten wir an Stelle der Gleichungen 77, 78 und 33m die folgenden:

$$\Gamma) \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\mathfrak{V}}\left(\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}\right) - \frac{d\psi}{dx}, \\ \beta = \frac{1}{\mathfrak{V}}\left(\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}\right) - \frac{d\psi}{dy}, \\ \gamma = \frac{1}{\mathfrak{V}}\left(\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}\right) - \frac{d\psi}{dz}. \end{cases}$$

Dabei ist ψ dieselbe Grösse wie früher. Es ist also nach den Gleichungen 36m und 37m:

---

[1]) Sind nämlich ξ, η, ζ die Coordinaten des Volumelementes $d\tau$, so liefert die partielle Integration:

$$\int \frac{d\tau}{\varrho}\frac{d(M\alpha)}{d\xi} = -\int d\tau\, M\alpha \frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{d\xi} = \frac{d}{dx}\int d\tau\, M\alpha \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

36mf) $$\psi = \int \frac{\eta_f d\tau}{\varrho} = \frac{1}{4\pi}\overline{\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right)}.$$

Dagegen hat U folgende Bedeutung:

93) $$U = \int \frac{d\tau}{\varrho}\left[L(P+X) + \frac{D}{4\pi}\frac{dP}{dt}\right] = \overline{L(P+X) + \frac{DP_t}{4\pi}},$$

wobei der angehängte Index t eine Differentiation nach t bedeutet. Analog sind V und W definirt.

Die Gleichungen Γ und Δ enthalten zwei neue Unbekannte φ und ψ; denn die Gleichungen 36f und 36mf sind nicht als zwei neue zur Bestimmung von φ und ψ geeignete Gleichungen zu betrachten, da sie aus Γ und Δ und dem Verschwinden von φ und ψ im Unendlichen folgen. Setzt man die Werthe von φ und ψ aus 36f und 36mf in Γ und Δ ein, so erhält man nicht mehr sechs unabhängige Gleichungen für die sechs Unbekannten $P, Q, R, \alpha, \beta, \gamma$.

Um ein zur Bestimmung von $P, Q, R, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$ ausreichendes System von acht independenten Gleichungen zu erhalten, muss man zu Γ und Δ noch die folgenden beiden Gleichungen dazu nehmen:

16a) $$\begin{cases} \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{d(DP)}{dx} + \frac{d(DQ)}{dy} + \frac{d(DR)}{dz}\right] + \frac{dL(P+X)}{dx} \\ \qquad + \frac{dL(Q+Y)}{dy} + \frac{dL(R+Z)}{dz} = 0, \end{cases}$$

74f) $$\frac{d(M\alpha)}{dx} + \frac{d(M\beta)}{dy} + \frac{d(M\gamma)}{dz} = 0$$

(wobei wir wahren Magnetismus ausschliessen), sowie auch die Bedingung, dass φ und ψ im Unendlichen verschwinden. Für Discontinuitätsflächen müssen natürlich sowohl die Gleichungen als auch die Integrale die nach dem Principe der Continuität der Uebergänge gebildete Form annehmen. Diese Gleichungen Γ, Δ, 16a und 74f ersetzen die ursprünglichen Maxwell'schen C und D vollständig.

Da sie α, β, γ und P, Q, R nicht bloss durch die Zustände der unmittelbar benachbarten Volumelemente, sondern durch Integrale ausdrücken, welche über den ganzen Raum zu erstrecken sind, so wollen wir sie die Mawell'schen Fernwirkungsgleichungen nennen. Sie sind insofern unlogischer und für die Berechnung rascher elektrischer Schwingungen weniger

brauchbar als die Gleichungen, von denen wir ausgingen, weil die Formeln für α, β, γ selbst wieder die Kenntniss von P, Q, R im ganzen Raume und umgekehrt die für P, Q, R die Kenntniss von α, β, γ im ganzen Raume voraussetzt.

Dagegen sind sie ganz gemacht zur Berechnung der angenähert stationären (aphoten) Bewegung. Wären daher die Nahewirkungsgleichungen C und D das uns ursprünglich Gegebene, so müsste die alte Fernwirkungstheorie als eine geradezu geniale Methode zur angenäherten Integration derselben bezeichnet werden. Hat man es z. B. mit einer endlichen Zahl linearer Ströme zu thun, so kann man die gesammte Bewegung in jedem derselben angenähert durch eine einzige Variable (die Stromstärke) charakterisiren, und aus derselben P, Q, R so berechnen, als ob der Strom stationär wäre. Aus den Gleichungen Γ berechnet man dann vermittelst der gefundenen Werthe von P, Q, R die Werthe von $\alpha, \beta \gamma$ und substituirt diese in die Gleichungen Δ. Man erhält dadurch gewöhnliche Differentialgleichungen mit einer Unbekannten für die Stromstärke, am besten, indem man für jeden Stromkreis:

$$\int (P dx + Q dy + R dz)$$

berechnet. Aus diesen und den Anfangsbedingungen können die Stromstärken selbst bestimmt werden. Kann ein Theil einer Leitung nicht als linear betrachtet werden, so setzt man voraus, dass sich der Strom dort angenähert so vertheilt, als ob er stationär wäre. Die genauere Berechnung der Vertheilung daselbst, sowie überhaupt in den verschiedenen Flächenelementen des Querschnittes eines beliebigen stromführenden Drahtes ist Gegenstand eines weiteren Grades von Annäherung.

Um in unserem Bilde der Erweiterung Rechnung zu tragen, welche die Gleichungen 77 dadurch erfuhren, das U, V, W an die Stelle von $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ traten, müssen wir annehmen, dass bezüglich der inducirenden Wirkung zum galvanisch geleiteten Strome, der die Componenten:

$$p = L(P + X), \quad q = L(Q + Y), \quad r = L(R + Z)$$

hat, noch ein zweiter mit den Componenten:

$$\frac{D P_t}{4\pi}, \quad \frac{D Q_t}{4\pi}, \quad \frac{D R_t}{4\pi}$$

hinzukommt, welcher überall sich einfach zum ersten addirt,

also denselben inducirenden (und um das Energieprincip zu wahren, auch magnetisirenden und elektrodynamischen) Effekt hat. Die Elektricitätsmenge, die als galvanisch geleiteter Strom in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit in der Abscissenrichtung strömt, ist nach Formel 23 $p = L(P + X)$. In Folge der dielektrischen Polarisation hat die Volumeinheit nach Formel 44 das dielektrische Moment:

$$\mathfrak{x} = \frac{D - \mathfrak{d}}{4\pi} P$$

in der Abscissenrichtung, welches wir uns dadurch entstanden denken können, dass im Volumelemente $dx \, . \, dy \, . \, dz$ auf der zur Abscissenaxe senkrechten, der negativen Abscissenrichtung zugewandten Begrenzungsfläche $dy \cdot dz$ die negative Elektricität unbeweglich sitzen bleibt, wogegen die positive Elektricitätsmenge:

$$\frac{D - \mathfrak{d}}{4\pi} P \, dy \, dz$$

um das Stück dx verschoben wird, was einem Integralstrome von der Intensität:

$$\frac{D - \mathfrak{d}}{4\pi} P \, dy \, dz,$$

also von der Stromdichte:

$$\frac{D - \mathfrak{d}}{4\pi} P$$

entspräche. Aendert sich die dielektrische Polarisation, so entspricht dies also einem Strome von der Stromdichte:

$$\frac{D - \mathfrak{d}}{4\pi} \frac{dP}{dt}$$

in der Abscissenrichtung, dem dielektrischen Polarisationsstrome. Man müsste also, um zu den Formeln Maxwell's zu gelangen, in dem Bilde annehmen, dass die durch dielektrische Polarisation verschobene Elektricität, während sie verschoben wird, im Verhältnisse $D / D - \mathfrak{d}$ mal stärker elektrodynamisch wirkt, als die galvanisch geleitete. Ist dagegen $\mathfrak{d}$ gleich Null, so hat man der Elektricität einfach dieselbe elektrodynamische Wirkung zuzuschreiben, ob sie im galvanischen Strome fliesst, oder durch dielektrische Polarisation verschoben wird.

Sowohl die elektrischen Kräfte P, Q, R als auch die magnetischen α, β, γ erscheinen in den Formeln Γ und Δ als Summen zweier Addenden, von denen der eine der Differentialquotient

des Potentials aller wahren und durch Influenz frei gewordenen Elektricitäts- oder Magnetismusmengen ist, der andere aber die sogenannte Inductionswirkung darstellt. Die so modificirte Fernwirkungstheorie liefert also nicht bloss für aphote Bewegungen, sondern auch in allen anderen Fällen dasselbe Resultat wie die Maxwell'sche, und es kann durch Experimente in keiner Weise zwischen beiden entschieden werden. Würde z. B. alles im unelektrischen und unmagnetischen Zustande sein, und plötzlich an einer Stelle Trennung von Elektricität stattfinden, so würde zunächst in der unmittelbaren Umgebung durch Influenz und dielektrische Polarisation entgegengesetzte Elektricität frei, welche anfangs die Fernwirkung der ursprünglich erzeugten Elektricität an jedem Punkte solange aufhöbe, bis er von den elektrischen Wellen erreicht würde. Freilich muss $\mathfrak{d}$ so klein angenommen werden, dass für jeden Körper $D - \mathfrak{d}$ positiv ist. Wäre diese Grösse für einen Körper gleich Null, so müsste in demselben der dielektrische Polarisationsstrom unendlich stark in die Ferne wirken, wogegen ein negativer Werth von $D - \mathfrak{d}$ zu Labilität des Ruhezustandes führen würde.

Nimmt man dagegen an, dass die dielektrischen Polarisationsströme wie die galvanisch geleiteten, nicht $D/D - \mathfrak{d}$ mal stärker wirken, so ist die experimentelle Bestimmung von $\mathfrak{d}$ möglich.

Falls man $L = X = Y = Z = 0$ setzt, lassen sich in den Formeln die Grössen D, P, Q, R, φ vollständig mit $M, \alpha, \beta, \gamma, \psi$ vertauschen. Die magnetischen Erscheinungen spielen sich also gerade so ab, wie die elektrischen in einem Nichtleiter, der von äusseren elektromotorischen Kräften frei ist. Erst dadurch, dass die dielektrische Polarisation eines solchen wieder vollständige Analogie mit der stationären Strömung zeigt, entsteht die weitere Analogie zwischen magnetischer Polarisation und stationärer Strömung, die sich aber nicht wie die erstere Analogie auch auf Fernwirkung und Inductionswirkung erstreckt, indem z. B. stationäre Ströme auf Magnetpole, aber nur veränderliche magnetische Polarisationen auf wahre Elekricität ponderomotorisch wirken.

In einem Systeme von Körpern, wo weder Leitungsfähigkeit noch äussere elektromotorische Kräfte vorhanden sind,

werden freilich, wenn es anfangs vollkommen unelektrisch und unmagnetisch war, keine elektrischen Bewegungen entstehen können. Wenn aber schon zu Anfang wahre Elektricität vorhanden war, wird diese nach den Gesetzen, welche wir kennen gelernt haben, ponderomotorisch und dielektrisch polarisirend wirken. Ebenso können auch elektrische und magnetische Oscillationen, welche schon zu Anfang erregt waren, weiter verlaufen. In diesem speciellen Falle sind dann Elektricität und Magnetismus durch vollkommen analoge Gleichungen bestimmt.

Da, wie wir sahen, Aenderungen der dielektrischen Polarisation elektrischen Strömen vollkommen äquivalent sind, so müssten sich zwei Paraffinringe, in deren jedem gleichsinnig sich eine tangentiale (auf der Meridianebene senkrechte), rund herum gehende dielektrische Polarisation rasch ändert, gerade so anziehen, wie zwei elektrische Ströme. Aus der Reciprocität zwischen Elektricität und Magnetismus folgt dann weiter, dass sich auch zwei Eisenringe, in denen sich tangentiale magnetische Polarisationen gleichsinnig ändern, anziehen müssen, welche Fernwirkung ebenfalls unserem Bilde beigefügt werden müsste. Hierauf machte zuerst Hertz [1]) aufmerksam. Auch Paraffinringe, die einem verwandten Zwecke dienen sollten, hatte Hertz schon gegossen. [2])

§ 26. Induction in einer geschlossenen Bahn.

Wie schon bemerkt, müssen wir, um die Inductionsströme zu erhalten, in Formel Δ auch die letzten Glieder rechts berücksichtigen, dürfen also P, Q, R nicht mehr als Ableitungen einer und derselben Grösse nach den Coordinaten betrachten. Um aus den Gleichungen Δ die Grösse φ zu eliminiren, bestimmen wir

$$\int (P\,dx + Q\,dy + R\,dz),$$

über die ganze geschlossene Strombahn erstreckt, in welcher der Inductionsstrom zu berechnen ist. Es ergiebt sich:

---

[1]) Hertz, Wied. Ann., Bd. 23, S. 84, 1884.

[2]) Siehe dessen Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, S. 7.

$$\int(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = -\frac{1}{4\pi\mathfrak{V}}\frac{d}{dt}\int\left[\left(\frac{d\overline{M\gamma}}{dy} - \frac{d\overline{M\beta}}{dz}\right)dx\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d\overline{M\alpha}}{dz} - \frac{d\overline{M\gamma}}{dx}\right)dy + \left(\frac{d\overline{M\beta}}{dx} - \frac{d\overline{M\alpha}}{dy}\right)dz\right],$$

daher nach dem Stokes'schen Satze, da

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d(M\alpha)}{dx} + \frac{d(M\beta)}{dy} + \frac{d(M\gamma)}{dz}\right]$$

und daher auch

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d\overline{M\alpha}}{dx} + \frac{d\overline{M\beta}}{dy} + \frac{d\overline{M\gamma}}{dz}\right]$$

jedenfalls verschwinden,

$$\int(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = -\frac{1}{4\pi\mathfrak{V}}\frac{d}{dt}\int do[\Delta\overline{M\alpha}\cos(nx)$$
$$+ \Delta\overline{M\beta}\cos(ny) + \Delta\overline{M\gamma}\cos(nz)],$$

und da $\Delta\overline{M\alpha} = -4\pi M\alpha$, so folgt weiter:

94) $$\int(Pdx + Qdy + Rdz) = \frac{1}{\mathfrak{V}}\frac{d}{dt}\int Mdo[\alpha\cos(nx) + \beta\cos(ny)$$
$$+ \gamma\cos(nz)].$$

Man kann diese Gleichung nach Hertz einfacher finden, indem man zuerst schreibt:

$$\int(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int\left[\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right)\cos(nx)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right)\cos(ny) + \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\cos(nz)\right]do,$$

und dann für

$$\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}$$

und die beiden analogen Grössen deren Werthe aus den Gleichungen D substituirt. Ich habe aber absichtlich den obigen weitschweifigen Weg eingeschlagen, weil er die Natur dieser Grössen als Correctionsglieder zu P, Q, R, die über eine geschlossene Curve integrirt, nicht verschwinden, während die Hauptglieder verschwinden, besser hervortreten lässt.

Wenn das Integrale der rechten Seite der Formel 94 eine

lineare Funktion der Zeit ist, was in allen Fällen mit Ausnahme der raschesten elektrischen Schwingungen sehr angenähert erfüllt ist, so wird der Inductionsstrom vollkommen stationär und seine Stromintensität $J = \sigma\omega$ in jedem Querschnitte σ des Leiters dieselbe. ω ist die Stromdichte normal zum Querschnitt σ. Die Gleichung 20 liefert daher

$$J\,ds = \sigma L N ds = \sigma L(P\,dx + Q\,dy + R\,dz),$$

folglich:

$$J\int\frac{ds}{L\sigma} = \int(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = -\frac{d\Omega}{dt},$$

wobei Ω dieselbe Bedeutung wie in Gleichung 90 hat. Da $i\,\Omega$, wie wir schon sahen, das elektrodynamische Potential der beiden Ströme auf einander ist, so liefert dies die bekannten Franz Neumann'schen Gesetze für die galvanische Induction. Nach Gleichung 88 wird, wenn nur ein einziger Strom von der Intensität i' inducirend wirkt:

$$\Omega = i' M\int\frac{ds\,ds'\cos(ds, ds')}{\varrho}.$$

Ich will hier noch die folgende Bemerkung beifügen. Sei ein ganz beliebig gestalteter leitender zweifach zusammenhängender Raum (Ring) gegeben; daselbst soll durch veränderliche, ausserhalb der Ringmasse liegende, elektrische Ströme oder Magnete ein elektrischer Strom inducirt werden. Die Aenderungsgeschwindigkeit der Ströme und Magnete soll durch einige Zeit constant sein. Dann ist bekanntlich immer:

$$dx\frac{d}{dt}\left[\frac{d\overline{M\beta}}{dz} - \frac{d\overline{M\gamma}}{dy}\right] + dy\frac{d}{dt}\left[\frac{d\overline{M\gamma}}{dx} - \frac{d\overline{M\alpha}}{dz}\right] + dz\frac{d}{dt}\left[\frac{d\overline{M\alpha}}{dy} - \frac{d\overline{M\beta}}{dx}\right]$$

im Innern der Ringmasse das vollständige Differential einer mehrdeutigen Funktion

$$4\pi\mathfrak{d}\chi.$$

Die Gleichungen Δ liefern daher

$$P = -\frac{d\chi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}.$$

Setzen wir daher:

$$P + \frac{d\chi}{dx} = P_1, \quad Q + \frac{d\chi}{dy} = Q_1, \quad R + \frac{d\chi}{dz} = R_1,$$

so sind innerhalb der Ringmasse P_1, Q_1, R_1 die partiellen Ableitungen einer eindeutigen Funktion der Coordinaten nach diesen, da φ aus den in § 18 S. 90 angeführten Gründen eindeutig ist. Da χ nicht von der Zeit abhängt, kann man die erste der Gleichungen C auch so schreiben:

$$\frac{D}{\mathfrak{V}}\frac{dP_1}{dt} = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} - 4\pi\frac{L}{\mathfrak{V}}\left(P_1 - \frac{d\chi}{dx}\right),$$

und analog die beiden anderen für die y- und z-Axe. Genau dieselben Gleichungen, denen hier die Grössen P_1, Q_1, R_1 genügen, würde man für P, Q, R erhalten, wenn die Elektricitätsbewegung überall stationär wäre, also keine inducirenden Ströme oder Magnete vorhanden wären, dafür aber

$$X = -\frac{d\chi}{dx}, \quad Y = -\frac{d\chi}{dy}, \quad Z = -\frac{d\chi}{dz}$$

wäre. Alsdann würden die Gleichungen D nur fordern, dass P, Q, R die Ableitungen derselben Grösse nach den Coordinaten sein müssen, welcher Bedingung ebenfalls P_1, Q_1, R_1 genügen. Es haben also bei dem Problem der Induction P_1, Q_1, R_1 dieselben Werthe wie beim letzteren Problem P, Q, R. Da aber bei ersterem Problem LP, LQ, LR, bei letzterem

$$L(P_1 + X) = LP, \quad L(Q_1 + Y) = LQ, \quad L(R_1 + Z) = LR$$

die Stromdichten sind, so ergiebt sich, dass beim ersten Problem die Inductionsströme genau dieselben Gesetze befolgen, wie beim letzteren die durch äussere elektromotorischen Kräfte erzeugten, deren Componenten ebenfalls die partiellen Differentialquotienten der mehrdeutigen Funktion χ sind.

Da wir im § 18 sahen, dass im letzteren Falle der Verlauf der elektrischen Ströme unabhängig von der Form der Funktion χ und bloss proportional der Constanten ist, um welche diese bei einem Umlauf um den Ring wächst, so ist auch der Verlauf der Inductionsströme derselbe, sobald nur für die jetzt wieder mit χ bezeichnete Funktion diese Constante denselben Werth hat.

Wir sahen ferner folgendes: Wenn der Ring statt aus leitender Substanz aus verschiedenen Dielektricis gebildet wäre, deren Dielektricitätsconstanten durchaus sehr gross gegenüber

den Dielektricitätsconstanten der den Ring umgebenden Körper wären, so würden genau dieselben Grenzbedingungen, wie für einen Ring aus leitenden Substanzen gelten, nur dass die D an Stelle von $4\pi L$ träten. Wie früher die Stromdichten, so wären jetzt die Componenten der dielektrischen Momente den Grössen P, Q, R proportional. Unter dem Einflusse derselben inducirenden Kräfte würden sich also die dielektrischen Polarisationen gerade so vertheilen, wie in einem leitenden Ringe die Stromstärken, und ebenso würden sich auch in einem aus verschiedenen weichen Eisensorten bestehenden Ringe unter dem Einflusse gleicher magnetisirender Kräfte die magnetischen Polarisationen verhalten, falls nur die Magnetisirungsconstanten sämmtlicher Eisensorten genügend gross wären.

Dreizehnte Vorlesung.

§ 27. Veränderte Form der aus Maxwell's Theorie folgenden Fernwirkungsgleichungen.

Wir wollen zunächst an den Maxwell'schen Gleichungen einige rein formale Veränderungen vornehmen. Um Platz zu ersparen, schreibe ich immer nur die auf die x-Richtung bezüglichen Formeln, ohne besonders hervorzuheben, dass analoge auch für die y- und z-Richtung gelten, da der Leser immer leicht selbst sehen wird, wo dies der Fall ist. Wir setzen zunächst in Gleichung D $M = M' + \mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}$ wieder eine beliebige, für alle Körper zu allen Zeiten constante Grösse ist. Alsdann differenziren wir die zweite der Gleichungen D partiell nach z, die dritte partiell nach y und subtrahiren. Wir erhalten dann:

$$\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{V}}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}\right) + \frac{1}{\mathfrak{V}}\frac{d}{dt}\left(\frac{d(M'\beta)}{dz} - \frac{d(M'\gamma)}{dy}\right)$$

$$= \Delta P - \frac{d}{dx}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\right),$$

und hieraus:

$$\Delta\mathfrak{m})\ P = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{V}^2}\frac{dU}{dt} + \frac{1}{4\pi\mathfrak{V}}\frac{d}{dt}\left[\frac{d\overline{(M-\mathfrak{m})\gamma}}{dy} - \frac{d\overline{(M-\mathfrak{m})\beta}}{dz}\right].$$

wobei, wie früher,

$$93)\qquad U = \overline{L(P+X) + D.P_t/4\pi}.$$

Die drei Gleichungen, deren Repräsentant $\Delta\mathfrak{m}$ ist, im Vereine mit Γ, 16a und 74f ersetzen die Maxwell'schen vollständig. Wir können diese Gleichungen folgendermaassen interpretiren: Die elektrische Kraft P in einem Punkte A des Raumes (Aufpunkt) setzt sich aus drei Addenden zusammen. Der erste Addend ist die elektrostatische Kraft. Es ist dies die Kraft, welche eine Masse, die den Raum mit der Dichte

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\right)$$

erfüllen würde, auf eine im Punkte A befindliche Masse 1 nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze ausüben würde. Der constante Faktor bei letzterem ist dabei gleich 1, dieses also in der Form mm'/ϱ^2 zu denken und es wird angenommen, dass gleichbezeichnete Massen sich nach diesem Gesetze abstossen.

Der zweite Addend ist die elektrodynamische Kraft. Um diese zu interpretiren, erklären wir zuerst die Gleichungen Γ. Wir denken uns nämlich zur Stromdichte des galvanisch geleiteten Stromes $p = L(P+X)$ noch die dielektrische Stromdichte $DP_t/4\pi$ hinzu addirt. Die Summe $p + DP_t/4\pi = u$ nennen wir die gesammte nach der X-Richtung geschätzte Stromdichte und definiren ebenso v und w. Jedes Volumelement $dx\,dy\,dz$ ist nun drei Stromelementen mit den Intensitäten $u\,dy\,dz$, $v\,dx\,dz$, $w\,dx\,dy$ und den Längen dx, dy und dz äquivalent.

Als das elektrodynamische Potential der Stromelemente ds, ds' mit den Stromintensitäten i, i' bezeichnen wir die Grösse:

$$d\mathfrak{P} = \frac{i\,i'\,ds\,ds'\cos(ds,ds')}{\mathfrak{V}^2\varrho}$$

und nehmen an, dass die ponderomotorische Kraft auf jedes Stromelement $i\,ds$ nach irgend einer Coordinatenrichtung gleich dem Differentialquotienten des elektrodynamischen Potentials aller anderen Stromelemente darauf, also des über alle anderen

Stromelemente erstreckten Integrals von $d\mathfrak{P}$ nach der betreffenden Coordinate ist.

Die nach den Coordinateneinrichtungen geschätzten Kraftcomponenten, welche infolge aller vorhandenen Ströme mit Einschluss etwa vorhandener unveränderlicher Molekularströme (permanenter Magnete) auf das Ende eines Solenoids wirken, für welches $ifNM/\mathfrak{V} = 1$ ist, definiren wir als die Componenten der magnetischen Kraft (besser Feldstärke) und bezeichnen sie mit α, β, γ. Hierdurch sind die Gleichungen Γ interpretirt. Der zweite Addend im Ausdrucke für P ist, da wir hierbei Einfachheit halber $\mathfrak{m} = 1$ setzen, der nach der Zeit genommene negative Differentialquotient des elektrodynamischen Potentials aller vorhandenen elektrischen Ströme auf ein im Aufpunkt gedachtes, der Abscissenrichtung paralleles Stromelement von der Intensität und Länge 1. Es muss also angenommen werden, dass zur elektrostatischen Kraft noch eine zweite kommt, welche diesem Differentalquotienten gleich ist.

Was endlich den dritten vom Magnetismus herrührenden Addenden anbelangt, so ist es nicht nothwendig, dafür besondere Grundannahmen zu machen. Es genügt vorauszusetzen, dass in jedem Volumelemente kleine in sich geschlossene elektrische Ströme (Molekularströme) entstehen (oder sich ordnen), beides unter Ueberwindung einer α proportionalen Molekularkraft, so dass für sie die Summe der Produkte aus der Stromintensität und der Projektion ihrer Fläche auf die yz-Ebene immer gleich

$$\frac{M-1}{4\pi}\cdot\alpha$$

ist, wobei α die oben definirte magnetische Kraft, M eine Constante ist. Analoges muss natürlich von der y- und z-Richtung gelten. Durch die Annahme, dass diese Molekularströme gerade so elektrodynamisch und inducirend wirken, wie sichtbare Ströme, erhält man den dritten Addenden in der Gleichung $\Delta\mathfrak{m}$ für P, den man die elektromagnetische Induktionskraft nennen kann. Um endlich die Gleichungen 16a, A, 8 und 9, welche ja giltig bleiben, zu interpretiren, haben wir noch die dielektrische Verschiebung und das Fortströmen der neutralen Elektricität unter Gegenwirkung einer bei ersterer der Ver-

schiebung, bei letzterer der Geschwindigkeit proportionalen Kraft ganz wie in den §§ 6, 7 und 11 anzunehmen.

Alle diese Aussagen, welche wir hier nur als eine Interpretation der im Laufe der Untersuchung erhaltenen Gleichungen aufgefasst haben, könnte man auch als Grundlage der ganzen Theorie an die Spitze stellen, ähnlich wie es die alte Fernwirkungstheorie macht. Man würde daraus sofort die Gleichungen Γ und $\Delta\mathfrak{m}$ erhalten. Da wir die Magnetismen durch Molekularströme erzeugt denken, denen durchaus in sich zurückkehrende magnetische Kraftlinien zukommen, so würde folgen, dass Kraftlinien nirgends ihren Anfang nehmen oder enden können, d. h. es folgt die Gleichung 74f und endlich würde aus der Annahme über die stoffliche Natur des elektrischen Fluidums, wie wir sie in den §§ 5—12 gemacht haben, die Gleichung 16a folgen. Dass wir, um dem dielektrischen Polarisationsstrom Rechnung zu tragen, zu p das Glied $D\,.\,P_t\,/\,4\,\pi$ addirt haben, könnte man wieder damit motiviren, dass er $D-\mathfrak{d}\,/\,D$ mal stärker als der galvanisch geleitete Strom wirkt. Aus den Gleichungen Γ, $\Delta\mathfrak{m}$, 16a und 74f könnte man dann umgekehrt die Maxwell'schen Nahewirkungsgleichungen ableiten, welche für uns den Ausgangspunkt bildeten.

Eine weitere, rein formale Veränderung ergiebt sich, wenn man statt X, Y, Z drei Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ einführt, welche für $t=-\infty$ verschwinden und die Differentialgleichungen erfüllen:

95) $$\begin{cases} \dfrac{D-\mathfrak{d}}{4\pi}\dfrac{d\mathfrak{X}}{dt}+L\mathfrak{X}=LX \\ \dfrac{D-\mathfrak{d}}{4\pi}\dfrac{d\mathfrak{Y}}{dt}+L\mathfrak{Y}=LY \\ \dfrac{D-\mathfrak{d}}{4\pi}\dfrac{d\mathfrak{Z}}{dt}+L\mathfrak{Z}=LZ \end{cases}$$

d. h. wenn man setzt:

$$\mathfrak{X}=\frac{4\pi L}{D-\mathfrak{d}}e^{-\frac{4\pi Lt}{D-\mathfrak{d}}}\int\limits_{-\infty}^{t}Xe^{\frac{4\pi Lt}{D-\mathfrak{d}}}dt,$$

wobei $\mathfrak{d}$ vorläufig eine beliebige Constante ist. Analoge Werthe haben $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$.

Sind uns die Grössen X, Y, Z als Funktionen der Zeit und der Coordinaten gegeben, so sind es auch $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$. Sind X, Y, Z

für längere Zeit constant, so wird $\mathfrak{X} = X$, $\mathfrak{Y} = Y$, $\mathfrak{Z} = Z$. Da nur dieser Fall einigermaassen genauer untersucht ist, so lässt sich in keiner Weise entscheiden, ob es zweckmässig ist, die Grössen X, Y, Z oder $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ als die von aussen wirkenden Kräfte zu betrachten. Durch Einführung von $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ an Stelle von X, Y, Z verwandeln sich die Maxwell'schen Nahewirkungsgleichungen C in Gleichungen von der Form:

$$\mathrm{C}\mathfrak{X})\qquad \frac{D}{\mathfrak{V}}\frac{dP}{dt} + \frac{D-\mathfrak{b}}{\mathfrak{V}}\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} - \frac{4\pi L}{\mathfrak{V}}(P+\mathfrak{X}),$$

während die Gleichungen D unverändert bleiben. Die Fernwirkungsgleichungen Γ und $\Delta\mathfrak{m}$ ändern sich nur insoweit, dass U, V, W statt durch die Gleichungen 93 durch Gleichungen bestimmt werden, welche die Form haben:

$$93\mathfrak{X})\qquad \overline{U = L(P+\mathfrak{X}) + \frac{DP_t}{4\pi} + \frac{(D-\mathfrak{b})}{4\pi}\mathfrak{X}_t}\,.$$

Für $\mathfrak{b} = 0$ wirken die äusseren elektromotorischen Kräfte, wenn man sie auf die Form $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ bringt, in dem Bilde auf die Strömungselektricität und Polarisationselektricität gleichmässig. Auf die Möglichkeit einer solchen Form wurde schon am Schlusse des § 11 hingewiesen. Durch Einführung von $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ geht ferner die Gleichung 16a über in:

$$16\mathfrak{X})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{d(D-\mathfrak{b})(P+\mathfrak{X})}{dx} + \frac{d(D-\mathfrak{b})(Q+\mathfrak{Y})}{dy}\right.\\ &\left.+\frac{d(D-\mathfrak{b})(R+\mathfrak{Z})}{dz}\right] + \frac{dL(P+\mathfrak{X})}{dx} + \frac{dL(Q+\mathfrak{Y})}{dy}\\ &+\frac{dL(R+\mathfrak{Z})}{dz} = -\frac{\mathfrak{b}}{4\pi}\frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\right). \end{aligned}\right.$$

Wollen wir diese letzte Gleichung durch unser Bild darstellen, so identificiren wir zunächst $\mathfrak{b}$ mit der bei Einführung der freien Elektricität im Bilde so bezeichneten Grösse. Für die Componenten des dielektrischen Moments der Volumeinheit in den drei Coordinatenrichtungen müssen wir dann die Werthe annehmen:

$$44\mathfrak{X})\qquad \mathfrak{x}' = \varepsilon'(P+\mathfrak{X}),\quad \mathfrak{y}' = \varepsilon'(Q+\mathfrak{Y}),\quad \mathfrak{z}' = \varepsilon'(R+\mathfrak{Z}),$$

wobei

$$\varepsilon' = \frac{D-\mathfrak{b}}{4\pi}$$

dieselbe Grösse ist, die wir früher mit ε_{vH} bezeichnet haben.

Für die Dichte der freien Elektricität dagegen müssen wir den Werth annehmen:

37 $\mathfrak{X}$)
$$\begin{cases} E' = \frac{\mathfrak{d}}{4\pi}\left[\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\right] = \frac{\mathfrak{d}}{4\pi}\left[\frac{d\left(\frac{\mathfrak{x}'}{\varepsilon'} - \mathfrak{X}\right)}{dx}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{d\left(\frac{\mathfrak{y}'}{\varepsilon'} - \mathfrak{Y}\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{\mathfrak{z}'}{\varepsilon'} - \mathfrak{Z}\right)}{dz}\right]. \end{cases}$$

Die Gleichung 16$\mathfrak{X}$ verwandelt sich dann in:

16 b)
$$\frac{dE'}{dt} = -\frac{du'}{dx} - \frac{dv'}{dy} - \frac{dw'}{dz},$$

wobei:

$$u' = \frac{d\mathfrak{x}'}{dt} + \frac{\mathfrak{x}'}{\varkappa\varepsilon'},\quad v' = \frac{d\mathfrak{y}'}{dt} + \frac{\mathfrak{y}'}{\varkappa\varepsilon'},\quad w' = \frac{d\mathfrak{z}'}{dt} + \frac{\mathfrak{z}'}{\varkappa\varepsilon'},\quad \varkappa = \frac{1}{L}$$

ist. Das Bild stellt dann zunächst die Gleichungen dar, deren Nummern mit dem Index $\mathfrak{X}$ versehen wurden. Und da diese noch immer mit den ursprünglichen Maxwell'schen identisch sind, so ist es nur ein verändertes Bild, das auch wieder die ursprünglichen Maxwell'schen Gleichungen darstellt, und wir befinden uns noch ganz auf dem Boden der Maxwell'schen Theorie. Es ist zwar das Bild, nicht aber die durch dasselbe oder durch die Gleichungen dargestellten Erscheinungen vom Werthe des $\mathfrak{d}$ abhängig.

Doch führen diese Gleichungen jetzt von selbst auf eine verallgemeinerte Theorie, welche nur für verschwindende $\mathfrak{d}$ mit der Maxwell'schen identisch wird, für andere Werthe des $\mathfrak{d}$ aber Erscheinungen darstellt, die vom Werthe des $\mathfrak{d}$ abhängen.

§ 28. v. Helmholtz'sche Theorie.

In unserem neuen Bilde ist gemäss der in § 25, pag. 122 entwickelten Principien die Aenderung der dielektrischen Polarisation einem Strome äquivalent, dessen in der Richtung der Abscissenaxe geschätzte Dichte gleich $\varepsilon'(P_t + \mathfrak{X}_t)$ ist. Es liegt nun der Gedanke nahe, wie in 16b, so auch in $C\mathfrak{X}$ resp. 93$\mathfrak{X}$ zum galvanisch geleiteten Strome an Stelle des Gliedes:

$$\frac{DP_t}{4\pi} + \frac{D - \mathfrak{d}}{4\pi}\mathfrak{X}_t$$

bloss den im Bilde erscheinenden dielektrischen Polarisationsstrom:

$$\frac{D-\mathfrak{d}}{4\pi}\,\frac{d(P+\mathfrak{X})}{dt} = \varepsilon'(P_t+\mathfrak{X}_t)$$

hinzu zu addiren. Die Fernwirkungsgleichungen Γ und $\Delta\mathfrak{m}$ bleiben dann unverändert, jedoch sind U, V, W an Stelle der Gleichungen 93 oder 93$\mathfrak{X}$ jetzt durch Gleichungen von folgender Form bestimmt:

$$U = \overline{L(P+\mathfrak{X}) + \frac{D-\mathfrak{d}}{4\pi}\left(\frac{dP}{dt}+\frac{d\mathfrak{X}}{dt}\right)} = \overline{\frac{d\mathfrak{x}'}{dt}+\frac{\mathfrak{x}'}{\varkappa\varepsilon'}} = \overline{u'}\,.$$

Es ist dann nicht mehr:

$$\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz} = 0.$$

Es ist daher mit den Gleichungen $\Delta\mathfrak{m}$ nicht mehr verträglich zu setzen:

96) $$-\Delta\varphi = \frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}.$$

Wir wollen φ noch immer als das Potential einer Masse definiren, welche den Raum mit der Dichte $E'/\mathfrak{d}$ erfüllt, d. h. wir halten das Coulomb'sche Gesetz für die Wirkung der Elektricitätsmengen auf einander aufrecht. E' ist aber nicht mehr durch die Gleichung 37$\mathfrak{X}$ definirt, sondern bloss durch die Gleichung 16b). Sein Anfangswerth für $t=0$ ist willkürlich (gleich der gegebenen schon anfangs vorhandenen freien Elektricität), d. h. wir halten daran fest, dass der Gehalt eines Volumelementes an freier Elektricität sich nur dadurch ändern kann, dass Elektricität entweder hinzu- oder hinweggeleitet oder durch dielektrische Polarisation hinein- oder herausgeschoben wird. Man kann aber die Gleichung:

$$\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz} = 0$$

wieder herstellen, indem man zu U, V, W noch die nach den Coordinaten genommenen Differentialquotienten der Grösse:

$$\Psi = \int d\tau\left[u'\frac{d\varrho}{d\xi}+v'\frac{d\varrho}{d\eta}+w'\frac{d\varrho}{d\zeta}\right] = \int d\tau\,.\,\varrho\,.\,\frac{dE'}{dt}$$

mit einem noch zu bestimmenden Faktor multiplizirt, addirt. Dem Faktor wollen wir die Form geben $(1-k)/2$, wobei k eine vorläufig willkürliche Constante ist. ξ, η, ζ sind hierbei

die Coordinaten des Volumelementes $d\tau$. Es folgt hieraus leicht:

$$\Delta \Psi = 2 \frac{d \overline{E'}}{d t} = 2 \mathfrak{d} \frac{d \varphi}{d t}.$$

Wir setzen also jetzt in den Gleichungen Γ und $\Delta \mathfrak{m}$:

$$93') \quad \begin{cases} U = \overline{L(P + \mathfrak{X}) + \frac{D - \mathfrak{d}}{4\pi}\left(\frac{d P}{d t} + \frac{d \mathfrak{X}}{d t}\right)} + \frac{1 - k}{2} \frac{d \Psi}{d x} \\ \quad = \overline{u'} + \frac{1 - k}{2} \frac{d \Psi}{d x}. \end{cases}$$

Wir erhalten aus diesem Ansatze:

$$97) \quad \frac{d U}{d x} + \frac{d V}{d y} + \frac{d W}{d z} = - k \frac{d \overline{E'}}{d t} = - k \mathfrak{d} \frac{d \varphi}{d t}.$$

Die so modificirte Maxwell'sche Theorie liefert also die Fernwirkungsgleichungen Γ und $\Delta \mathfrak{m}$, welche noch ergänzt werden durch die Gleichungen 16a und 74f. Darin sind U, V, W durch die Gleichungen 93′ gegeben.

Wir wollen nun ganz die von Herrn v. Helmholtz angewandten Buchstaben einführen, wobei wir nur diejenigen Buchstaben, die im Vorhergehenden eine andere Bedeutung hatten, mit einem Striche versehen. Mit einem solchen versehen wir auch die Nummern der Gleichungen. Wir setzen daher:

$A' = 1/\mathfrak{V}$, $\mathfrak{m} = 1$, $\vartheta = (M - 1)/4\pi$, $\lambda' = \vartheta \alpha$, $\mu' = \vartheta \beta$, $\nu' = \vartheta \gamma$.

Dadurch nehmen die Ferwirkungsgleichungen die Form an:

$$\Delta') \quad \frac{\mathfrak{r}'}{\varepsilon'} = - \frac{d \varphi}{d x} - A'^2 \frac{d U}{d t} + A \frac{d}{d t}\left(\frac{d \overline{\nu'}}{d y} - \frac{d \overline{\mu'}}{d z}\right) + \mathfrak{X}.$$

$$\Gamma') \quad \frac{\lambda'}{\vartheta} = - \frac{d \psi}{d x} + A\left(\frac{d V}{d z} - \frac{d W}{d y}\right).$$

Da φ das Potential einer mit der Dichte $E'/\mathfrak{d}$ im Raume vertheilten Masse ist, so kann man die Gleichung 16b auch so schreiben:

$$16') \quad \frac{1}{4 \pi \mathfrak{d}} \frac{d \Delta \varphi}{d t} = - \frac{d E'}{d t} = \frac{d u'}{d x} + \frac{d v'}{d y} + \frac{d w'}{d z}.$$

Aus Γ' folgt:

$$98) \quad \frac{d\left(\frac{\lambda'}{\vartheta}\right)}{d x} + \frac{d\left(\frac{\mu'}{\vartheta}\right)}{d y} + \frac{d\left(\frac{\nu'}{\vartheta}\right)}{d z} = - \Delta \psi.$$

Ferner liefert die Gleichung 74f:

$$74'))\quad \frac{d\left(\frac{\lambda'}{\vartheta}\right)}{d x}+\frac{d\left(\frac{\mu'}{\vartheta}\right)}{d y}+\frac{d\left(\frac{\nu'}{\vartheta}\right)}{d z}+4\pi\left(\frac{d\lambda'}{d x}+\frac{d\mu'}{d y}+\frac{d\nu'}{d z}\right)=0,$$

woraus weiter folgt:

$$99)\quad \frac{d\lambda'}{d x}+\frac{d\mu'}{d y}+\frac{d\nu'}{d z}=\frac{1}{4\pi}\Delta\psi.$$

Indem man die nach z differenzirte zweite der Gleichungen Γ' oder Δ' von der nach y differenzirten dritten abzieht, erhält man wieder die sechs Nahewirkungsgleichungen, welche die Form haben:

$$D')\quad \frac{d\left(\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon'}\right)}{d y}-\frac{d\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon'}\right)}{d z}=A\left(4\pi+\frac{1}{\vartheta}\right)\frac{d\lambda'}{d t}+\frac{d\mathfrak{Z}}{d y}-\frac{d\mathfrak{Y}}{d z},$$

$$C')\quad \frac{d\left(\frac{\nu'}{\vartheta}\right)}{d y}-\frac{d\left(\frac{\mu'}{\vartheta}\right)}{d z}=A\,\mathfrak{d}\,\frac{d^2\varphi}{d x\, d t}-4\pi A\left(\frac{d\mathfrak{x}'}{d t}+\frac{\mathfrak{x}'}{\varkappa\varepsilon'}\right).$$

Aus diesen Gleichungen würden die Gleichungen 16′ und 74′ identisch folgen. Statt der ersteren muss man daher zu den Gleichungen C′ und D′ die folgende hinzunehmen, welche sich ergiebt, wenn man die erste der Gleichungen Δ' nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differenzirt und sie dann addirt:

$$100)\quad \frac{d\left(\frac{\mathfrak{x}'}{\varepsilon'}-\mathfrak{X}\right)}{d x}+\frac{d\left(\frac{\mathfrak{y}'}{\varepsilon'}-\mathfrak{Y}\right)}{d y}+\frac{d\left(\frac{\mathfrak{z}'}{\varepsilon'}-\mathfrak{Z}\right)}{d z}+\Delta\varphi=A^2 k\,\mathfrak{d}\,\frac{d^2\varphi}{d t^2}.$$

Die Grösse ψ kommt in den Gleichungen nicht weiter vor, sie kann daher als eine neue durch die Gleichungen 98 oder 99 definirte Grösse betrachtet werden.

Diese Gleichungen sind vollkommen identisch mit den von Herrn v. Helmholtz entwickelten[1]), nur dass derselbe die Elektricität in dem für das ideale Standardmedium geltenden elektrostatischen Maasse misst, daher $\mathfrak{d}=1$ setzt, wogegen wir das für den realen Standardkörper (Luft) geltende elektrostatische Maass angewendet haben. Wir liessen daher $\mathfrak{d}$ willkürlich und setzten:

$$\varepsilon'=\frac{D-\mathfrak{d}}{4\pi},$$

[1]) v. Helmholtz, Gesammelte Abh. I. Th., S. 621.

wobei D die Dielektricitätsconstante gegenüber dem realen Standardkörper ist; bei uns ist also $\mathfrak{d}$ die Dielektricitätsconstante des idealen Standardkörpers relativ gegen den realen. Für $\mathfrak{d} = 0$ wird die Theorie bei jedem Werthe von k und ϑ mit der Maxwell'schen identisch, was schon Poincaré bemerkte. Ist $\mathfrak{d}$ von Null verschieden, aber $k = 0$, so reducirt sich die Gleichung 100 auf 96. Es ist also dies der Werth von k, welcher bewirkt, dass trotz der Verallgemeinerung die Giltigkeit der letzteren Gleichung und daher, da φ immer das Potential einer Masse von der Dichte E' ist, auch die der Gleichung 37 $\mathfrak{X}$ nicht aufgehoben wird.

In unserer alten Bezeichnung lauten die v. Helmholtz'schen Nahewirkungsgleichungen:

D) $$\frac{M}{\mathfrak{V}} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz},$$

C'') $$\mathfrak{V}\left(\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}\right) = (D - \mathfrak{d}) \frac{dP}{dt} + L(P + X) + \mathfrak{d} \frac{d^2 \varphi}{dx\, dt}.$$

Die Gleichung für ψ, nämlich:

$$\varDelta \psi = - \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{d\gamma} - \frac{d\gamma}{dz},$$

braucht nicht besonders dazu genommen zu werden, da ψ in den übrigen Gleichungen nicht vorkommt. Dagegen entfällt φ nicht, sobald $\mathfrak{d}$ von Null verschieden ist. Man muss daher die Gleichung 100 hinzunehmen, welche lautet:

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \varDelta \varphi = A^2 k \mathfrak{d} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Es ist dann durch die Anfangswerthe von $\alpha, \beta, \gamma, P, Q, R$, also durch den gesammten Anfangszustand der magnetischen und dielektrischen Polarisation, der gesammte zeitliche Verlauf der Erscheinungen noch nicht bestimmt. Daher ist auch der Schluss nicht mehr verwendbar, dass durch Grösse und Richtung der elektrischen und magnetischen Kraft an einer Stelle des Raumes die gesammte Wirkung auf ruhende und bewegte Elektricität und ruhenden und bewegten Magnetismus daselbst bestimmt ist, ohne dass es darauf ankommt, ob die elektrische Kraft z. B. von einer statischen Ladung oder einem veränderlichen Strome herrührt. Vielmehr müssen noch die Anfangswerthe von φ und $d\varphi/dt$ gegeben sein, welche bei verschie-

denem Ursprunge der elektrischen Kraft verschieden sein können. Aus φ kann man zunächst die Grösse:

$$E' = -\frac{\Delta\varphi}{4\pi}$$

bestimmen. Die Thatsache, dass φ und $d\varphi/dt$ gegeben sein muss, läuft also darauf hinaus, dass die gesammte freie Elektricität und deren Differentialquotient nach der Zeit für $t=0$ gegeben sein mufs.

Herr v. Helmholtz leitet wieder zunächst die Fernwirkungsgleichungen ab, indem er zur Basis seiner Theorie Principien macht, welche im Wesentlichen mit dem zu Anfang des vorigen Paragraphen Auseinandergesetzten übereinstimmen. Nur setzt er an Stelle des dort mit $d\mathfrak{P}$ bezeichneten Ausdruckes vielmehr:

$$d\mathfrak{P} = \frac{i\,i'\,ds\,ds'}{\mathfrak{V}^2\varrho}\left[\frac{1+k}{2}\cos(ds, ds') + \frac{1-k}{2}\cos(ds,\varrho)\cos(ds',\varrho)\right].$$

Wenn $i\,ds = 1$ gesetzt wird und ds die Abscissenrichtung hat, so ist die Summe der drei $d\mathfrak{P}$, welche sich auf die drei Stromelemente $u'\,d\tau$, $v'\,d\tau$, $w'\,d\tau$ beziehen, in der That:

$$\frac{d\tau}{\mathfrak{V}^2\varrho}\left[u' + \frac{1-k}{2}\left(u'\frac{d^2\varrho}{dx\,d\xi} + v'\frac{d^2\varrho}{dy\,d\eta} + w'\frac{d^2\varrho}{dx\,d\zeta}\right)\right].$$

Es hat also das über den ganzen Raum erstreckte Integral $\int d\mathfrak{P}$, durch welches gemäss den jetzigen Annahmen an Stelle der Gleichung 93 jetzt die Grösse $U/\mathfrak{V}^2$ definirt werden muss, den Werth:

$$\int d\mathfrak{P} = \int\frac{d\tau}{\mathfrak{V}^2\varrho}u' + \frac{1-k}{2\mathfrak{V}^2}\frac{d\Psi}{dx}.$$

Dazu kommt noch die Annahme, dass die dielektrischen Polarisationsströme ebenso stark wie die geleiteten wirken. Bezüglich der Consequenzen der v. Helmholtz'schen Theorie, namentlich der nach derselben möglichen Longitudinalwellen, muss ich auf das Original verweisen. Nur eine Bemerkung sei noch beigefügt. Hat man einen homogenen Körper, wo ε' und $\varkappa$ nicht Funktionen der Coordinaten sind, so kann man in den Gleichungen C′ und D′ setzen:

$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}'' + \frac{\mathfrak{d}\,e^{-\frac{t}{\varkappa\varepsilon'}}}{4\pi}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{t}{\varkappa\varepsilon'}}\frac{d^2\varphi}{dx\,dt}\,dt,$$

woraus folgt:

$$\frac{d\mathfrak{x}'}{dt} + \frac{\mathfrak{x}}{\varkappa\varepsilon'} - \frac{\mathfrak{d}}{4\pi}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} = \frac{d\mathfrak{x}''}{dt} + \frac{\mathfrak{x}''}{\varkappa\varepsilon'}.$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{y}''$ und $\mathfrak{z}''$ analog gebildete Ausdrücke, so wird ausserdem:

$$\frac{d\left(\frac{\mathfrak{z}''}{\varepsilon'}\right)}{dy} - \frac{d\left(\frac{\mathfrak{y}''}{\varepsilon'}\right)}{dz} = \frac{d\left(\frac{\mathfrak{z}'}{\varepsilon'}\right)}{dy} - \frac{d\left(\frac{\mathfrak{y}'}{\varepsilon'}\right)}{dz}.$$

Man erhält also statt der Gleichungen C' und D' ganz analoge für $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{z}''$, aus denen jedoch φ ebenso herausfällt, wie schon früher ψ herausfiel. Es sind daher $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{z}''$ die Repräsentanten der Transversalschwingungen, deren Veränderung genau wie nach Maxwell's Theorie, also unabhängig von den Longitudinalwellen erfolgt. Doch sind beide Wellengattungen von gegenseitigem Einflusse auf einander, sobald $\varkappa$ und ε' veränderlich sind, daher auch dort, wo zwei verschiedene Körper aneinander grenzen.

Bezüglich der Bezeichnungen bemerke ich noch, dass Maxwell die bisher gewahrte Symmetrie derselben dadurch stört, dass er beim Magnetismus ausser den Componenten der magnetischen Kraft noch die der Magnetisirungsintensität:

$$A = \frac{M-1}{4\pi}\alpha, \quad B = \frac{M-1}{4\pi}\beta, \quad C = \frac{M-1}{4\pi}\gamma$$

und die der magnetischen Induction $a = M\alpha$, $b = M\beta$, $c = M\gamma$ einführt, so dass also $a = \alpha + 4\pi A$ ist. Bei der Elektricität aber führt er bloss die Componenten der dielektrischen Verschiebung $f = DP/4\pi$, $g = DQ/4\pi$, $h = DR/4\pi$ ein. Die Symmetrie würde erfordern, auch hier die Grössen $(D-1)P/4\pi$ und DP einzuführen; freilich würde sich der Differentialquotient keiner dieser Grössen nach der Zeit ohne Faktor zum galvanisch geleiteten Strome addiren. Ich glaubte im I. Theile dieser Vorlesungen mehr Symmetrie zu erhalten, indem ich unter μ, a, b, c die Maxwell'schen Grössen verstand, dagegen:

$$\alpha = \frac{a}{4\pi\mu}, \quad \beta = \frac{b}{4\pi\mu}, \quad \gamma = \frac{c}{4\pi\mu}$$

setzte, so dass die von mir dort mit α bezeichnete Grösse gleich der Maxwell'schen dividirt durch 4π ist. Es scheint

jedoch dies auch nicht zweckmässig; man müsste vielmehr, wenn man die Relation $f = DP/4\pi$ beibehalten wollte, auch $a = M\alpha/4\pi$ setzen, wobei natürlich das von Maxwell, und auch hier, nicht aber das im I. Theile dieser Vorlesungen angewandte α gemeint ist. Dann würde also $4\pi a = \alpha + 4\pi A$.

Vierzehnte Vorlesung.

---

§ 29. Ueber die Wanderung wahrer Elektricität, welche sich ursprünglich im Innern von Leitern befand, nach deren Oberfläche und ein Theorem Gauss'.

Da die Maxwell'sche Theorie die elektrischen Erscheinungen vielfach von ganz anderen Gesichtspunkten betrachtet als die alte, so dürfte es zum Verständniss beitragen, specielle einfache Beispiele zu rechnen, welche nicht mit Rücksicht auf die praktische Verwerthung, sondern lediglich auf die leichte Durchführbarkeit der Rechnung gerade nach Maxwell's Formeln gewählt sind und daher nicht einen wesentlichen Theil der Maxwell'schen Theorie bilden, sondern bloss zu deren Veranschaulichung beitragen sollen. Wir kehren dabei wieder ganz zu den ursprünglichen, in den beiden ersten Vorlesungen entwickelten Formeln Maxwell's zurück, ohne die im vorigen Paragraph erwähnten Verallgemeinerungen.

Ich habe bisher absichtlich jedes Zurückgreifen auf die in der ersten Vorlesung zu Grunde gelegte mechanische Anschauung vermieden, um zu zeigen, dass sie zur Begründung der Gleichungen dienen kann, aber nicht muss, dass vielmehr die Resultate aus den Gleichungen allein bei beliebiger anderer mechanischer Grundlage, oder auch ganz ohne solche gewonnen werden können. Jetzt aber will ich auch auf jene mechanische Veranschaulichung wieder zurückkommen.

Ich betrachte zunächst folgendes Problem.[1] In einem

---

[1]) Unter allerdings anderen Anfangsbedingungen wurde dieses Problem auch von Herrn v. Helmholtz, Ges. Abh. Bd. I, S. 585 behandelt.

isotropen unendlichen Leiter, in dem nirgends äussere elektromotorische Kräfte wirken, sei zu Anfang der Zeit $\alpha = \beta = \gamma = 0$, und P, Q, R seien die partiellen Ableitungen einer Funktion der Entfernung r des Aufpunktes vom Coordinatenursprung $\int \Phi(r)\,dr$. L und D seien ebenfalls Funktionen von r. Da dann alles um den Coordinatenursprung herum symmetrisch ist, müssen P, Q, R auch zu allen Zeiten die partiellen Ableitungen einer Funktion φ von r und t bleiben, und es wird:

$$P = -\frac{x}{r}\frac{d\varphi}{dr}, \quad Q = -\frac{y}{r}\frac{d\varphi}{dr}, \quad R = -\frac{z}{r}\frac{d\varphi}{dr}.$$

Die Gleichungen D liefern dann zu allen Zeiten $\alpha = \beta = \gamma = 0$, und daher liefert die Gleichung C:

$$\varphi(r) = \int \Phi(r) e^{-\frac{4\pi L t}{D}}\, dr,$$

$$\varepsilon_w = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d}{dr}\left(D\frac{d\varphi}{dr}\right) + \frac{2D}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right] = -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 D\frac{d\varphi}{dr}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 D \Phi e^{-\frac{4\pi L}{D}t}\right).$$

Die radiale Geschwindigkeit der neutralen Elektricität ist:

101) $$\varrho = -L\frac{d\varphi}{dr}.$$

Durch die Kugel vom Radius r geht in der Zeit dt die Elektricitätsmenge

$$-4\pi r^2 L\frac{d\varphi}{dr}.$$

Der Gehalt an wahrer Elektricität zwischen den Kugeln von den Radien r und $r + dr$ nimmt also während der Zeit dt um

$$4\pi\, dr\, dt\frac{d}{dr}\left(L r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 4\pi\, dr\, dt\frac{d}{dr}\left(L r^2 \Phi e^{-\frac{4\pi L}{D}t}\right)$$

zu, was in der That gleich

$$dt\frac{d}{dt}(4\pi r^2\, dr\, \varepsilon_w)$$

ist. Die Dichte der freien Elektricität ist, wenn wir sogleich $\mathfrak{d} = 1$ setzen:

$$\varepsilon_f = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right) = -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \Phi e^{-\frac{4\pi L}{D}t}\right).$$

Die Dichte der durch dielektrische Polarisation ausgeschiedenen Elektricität ist:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_f - \varepsilon_w = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{d}{dr}\left[(D-1)r^2\frac{d\varphi}{dr}\right].$$

An Discontinuitätsflächen kann sich Elektricität von der Flächendichte

$$E_w = \frac{1}{4\pi}\left(D_0\,\Phi_0\,e^{-\frac{4\pi L_0}{D_0}t} - D_1\,\Phi_1\,e^{-\frac{4\pi L_1}{D_1}t}\right),$$

$$E_f = \frac{1}{4\pi}\left(\Phi_0 e^{-\frac{4\pi L_0}{D_0}t} - \Phi_1 e^{-\frac{4\pi L_1}{D_1}t}\right)$$

ansammeln, auch wenn ursprünglich die Flächendichte der wahren oder freien Elektricität Null war, also $D_0\,\Phi_0 = D_1\,\Phi_1$ oder $\Phi_0 = \Phi_1$ ist. Diese Elektricität verschwindet natürlich mit der Zeit wiederum. Nur wenn $\Phi_0 = \Phi_1 = 0$ ist, war auf der Kugelfläche ursprünglich keine Elektricität, und ist innen gleich viel positive und negative. Daher hat man auf der Kugelfläche nie Elektricität. Denn innerhalb der Kugel war zu Anfang die wahre Elektricitätsmenge $-r^2 D_0\,\Phi_0$, die freie $-r^2\,\Phi_0$. Natürlich ist stets

$$\frac{dE_w}{dt} = \varrho_0 - \varrho_1.$$

Der für ε_p gefundene Werth zeigt, dass die dielektrische Polarisation so gedacht werden kann, dass die Kugelschale vom Radius r und der Dicke dr innen mit der positiven, aussen mit der negativen Elektricitätsmenge

$$m = (D-1)r^2\frac{d\varphi}{dr}$$

bedeckt ist. Dadurch, dass auch die umschliessende Kugelschale analog bedeckt ist, wird auf der Aussenfläche der erstgenannten Kugelschale die Elektricitätsmenge

$$\frac{dm}{dr}dr$$

frei, welche man als die Gesammtmenge der durch die elektrische Polarisation ausgeschiedene Elektricität im Innern dieser ganzen Kugelschale bezeichnen kann. Dividirt man sie durch das Volumen der Schale $4\pi r^2 dr$, so erhält man in

der That den obigen Werth von ε_p. Das dielektrische Moment der Volumeinheit ist:

$$\mathfrak{x} = -\frac{m\,d\,r}{4\,\pi\,r^2\,d\,r} = -\frac{D-1}{4\,\pi}\frac{d\varphi}{d\,r}.$$

Es ist in der That:

$$\mathfrak{x} = \frac{D-1}{4\,\pi}\sqrt{P^2+Q^2+R^2} = -\frac{D-1}{4\,\pi}\frac{d\varphi}{d\,r}.$$

Ebenso ist φ in der That das elektrostatische Potential aller freien Elektricität, nämlich:

$$4\,\pi\left[\int\limits_0^r \frac{\varepsilon_f}{r}\varrho^2\,d\,\varrho + \int\limits_r^\infty \varepsilon_f\,\varrho\,d\,\varrho\right] = 4\,\pi\left[\frac{1}{r}\int\limits_0^r \varepsilon_f\,r^2\,d\,r + \int\limits_r^\infty \varepsilon_f\,r\,d\,r\right].$$

Die Anwendung der partiellen Integration auf das letzte Integrale reducirt den ganzen Ausdruck auf

$$\int \Phi\,e^{-\frac{4\pi L t}{D}}\,d\,r = \varphi\,.$$

Vorausgesetzt ist dabei, dass die Gesammtmenge der freien Elektricität nicht unendlich ist, dass also für grosse r der veränderliche Theil von φ mindestens wie a/r abnimmt, weil sonst das Potential unendlich oder unbestimmt wird. $\varphi(\infty)$ ist eine willkürliche additive Constante.

Wo sich keine freie Elektricität befindet, ist

$$\frac{d}{d\,r}\left(r^2\,\frac{d\varphi}{d\,r}\right) = 0\,.$$

Sind dort L und D constant, so ist dort auch keine wahre Elektricität und es sammelt sich auch weder wahre noch freie Elektricität an. Es ist dann dort

$$\Phi = \frac{a}{r^2}\,.$$

Ist D constant, aber L Funktion von r, so bildet sich dort zuerst freie und wahre Elektricität, deren Quanta sich immer wie $1 : D$ verhalten, und die dann wieder verschwinden. Ist auch D Funktion von r, so bleibt dieses constante Verhältniss nicht erhalten; doch steht stets die gesammte freie Elek-

tricität zur gesammten wahren innerhalb der Kugel in diesem Verhältnisse. Ist L constant und D Funktion von r und in einem Momente $\varepsilon_f = 0$, so ist in diesem Momente

$$\frac{d\varepsilon_w}{dt} = 0,$$

nicht aber verschwindet die Grösse

$$\frac{d\varepsilon_f}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \Phi \frac{4\pi L}{D} e^{-\frac{4\pi L}{D} t}\right).$$

Es kommt daher erst freie, dann auch wahre Elektricität hin, die aber wieder verschwinden. Nur wenn dort $\Phi = 0$ ist, ist ursprünglich weder wahre noch freie Elektricität dort und es kommt auch nie welche hin, weil innerhalb immer gleich viel positive als negative ist. Der Ausgleich dieser positiven und negativen Elektricität innerhalb ist dann, wie man sieht, ganz ohne Einfluss auf die Vorgänge ausserhalb.

Nach der mechanischen Hypothese der ersten Vorlesung sind alle diese Vorstellungen nur Bilder für die einfache Thatsache, dass überall Wirbel rotiren. Die Rotationsgeschwindigkeit ist in der Entfernung r vom Coordinatenursprung zu Anfang der Zeit $\Phi(r)$, die Rotationsaxe hat die Richtung der Geraden r. Da überall P, Q, R die Ableitung einer Funktion nach den Coordinaten sind, so ist die potentielle Energie V gleich Null nach Gleichung B. Es werden daher nirgends Kräfte auftreten, welche die Geschwindigkeit der Wirbel zu verändern streben, mit Ausnahme der dämpfenden oder Reibungskräfte LP, LQ, LR. Es ist daher:

$$\frac{D}{4\pi} \frac{dP}{dt} + LP = 0.$$

Alle Rotationsgeschwindigkeiten nehmen also gleichmässig proportional

$$e^{-\frac{4\pi L}{D} t}$$

ab. Ist für $r \gtreqless R$

$$\Phi = \frac{a}{r^2}$$

und L und D constant, so ist alle freie und wahre Elektricität auf den Raum $r < R$ beschränkt. Ist a von Null verschieden, so strömt in der Zeit dt die Elektricitätsmenge

$$- L a e^{-\frac{4\pi L}{D} t} dt$$

ins Unendliche ab. Ist dagegen $a = 0$, so verschwindet die Summe aller wahren Elektricität im Raume zwischen $r = 0$ und $r = R$. Diese gleicht sich also unter einander aus, ohne die äussere Umgebung zu beeinflussen. Ist z. B. $\Phi = b$ von $r = 0$ bis $r = R$, $\Phi = 0$ für $r > R$, und D und L im ganzen Raume constant, so ist die Volumdichte der wahren Elektricität für $0 < r < R$

$$-\frac{D b}{2 \pi r},$$

daher ist die ganze in diesem Raume befindliche wahre Elektricität $-D b R^2$. Auf der Schale vom Radius R aber ist mit der Flächendichte $D b / 4 \pi$ genau die gleiche positive Elektricitätsmenge aufgehäuft. Hätte Φ für $0 < r < R$ den gleichen Werth, dagegen für grössere r den Werth $b R^2 / r^2$, so würde die positive Umhüllung fehlen, und alle Elektricität ins Unendliche abfliessen. Die gleichmässige Dichte

$$-\frac{D a}{4 \pi}$$

der wahren Elektricität in der Kugel vom Radius R würde man erhalten, wenn

$$\Phi = \frac{a r}{3}$$

für $0 < r < R$ wäre. Wäre dann für $r > R$, $\Phi = 0$, so wäre wieder auf der Oberfläche der Kugel die gleiche und entgegengesetzt bezeichnete Elektricität wie in deren Innerem angehäuft. Wäre dagegen:

$$\Phi = \frac{a R^3}{3 r^2},$$

so würde diese Umhüllung fehlen. Es wäre dann zu Anfang der Zeit, wenn die Constante so bestimmt wird, dass φ im Unendlichen verschwindet, ausserhalb der Kugel

$$\varphi = -\frac{R^3 a}{3 r}$$

und im Innern der Kugel, da an deren Oberfläche φ selbst keinen Sprung machen darf,

$$\varphi = \frac{a r^2}{6} - \frac{a R^2}{2},$$

und es ist in der That φ das durch D dividirte Potential aller wahren Elektricität, oder das Potential der freien Elektricität.

Wäre der leitende Körper eine endliche Kugel vom Radius R und umgeben von einem Dielektricum, in welchem die entsprechenden Grössen mit dem Index 1 versehen werden sollen, so würden sich nach der mechanischen Vorstellung der ersten Vorlesung alle Vorgänge im Leiter genau wie früher abspielen. Die gesammte in demselben zur Zeit t enthaltene wahre Elektricität wäre, wenn man L und D wieder als constant voraussetzt,

$$-R^2 D\,\Phi(R)\,e^{-\frac{4\pi L}{D}t}.$$

Die auf der Grenzfläche zwischen Leiter und Dielektricum angesammelte Elektricität aber wäre, da der Werth Φ_1 des $d\varphi\,/\,dr$ im Dielektricum constant ist,

$$R^2\left[-D_1\,\Phi_1(R) + D\,e^{-\frac{4\pi L}{D}t}\,\Phi(R)\right].$$

Die Summe beider ist selbstverständlich constant. Sie wäre gleich Null, wenn $\Phi_1(R) = 0$ ist. Wäre speciell im Dielektricum nirgends wahre Elektricität, so müsste

$$\Phi_1(r) = \frac{a}{r^2}$$

sein. Die Constante a müsste den Werth

$$\frac{D\,R^2\,\Phi(R)}{D_1}$$

haben, wenn anfangs auf der Oberfläche der Kugel keine Elektricität wäre. Für $a = 0$ dagegen wäre die Summe des Elektricitätsmenge im Innern und an der Oberfläche der leitenden Kugel gleich Null. Die Exponentielle

$$e^{-\frac{4\pi L}{D}t}$$

ist also in gewisser Hinsicht das Maass der praktisch immer enormen Geschwindigkeit, mit welcher sich eine ursprünglich im Innern eines Leiters angehäufte Elektricität an dessen Oberfläche begiebt.

Einige allgemeinere Bemerkungen mögen noch Platz finden.

1. Betrachten wir einen homogenen Leiter, wo L und M constant sind, D aber verschwindet und keine äusseren elektromotorischen Kräfte wirken. Für diesen folgt zunächst aus den drei Gleichungen C:

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = 0,$$

ferner aus der ersten der Gleichungen C unter Zuziehung von D:

$$\frac{4\pi L M}{\mathfrak{V}^2}\frac{dP}{dt} = \Delta P,$$

ebenso für Q und R. Die elektrischen Kräfte pflanzen sich daher genau so fort, wie nach Fourier's Theorie die geleitete Wärme, was bekanntlich schon Maxwell wiederholt aussprach.

2. Wir denken uns wieder einen homogenen, von äusseren elektromotorischen Kräften freien Leiter $\mathfrak{S}$, wo L, M und D constant sind, letztere Grösse aber nicht verschwindet. Sowohl im Innern des Leiters $\mathfrak{S}$, als auch an dessen Oberfläche kann zu Anfang beliebige freie und wahre Elektricität sitzen. Die etwa mit Elektricität geladenen Oberflächenelemente aber wollen wir wie immer als Volumelemente von endlicher, wenn auch sehr geringer Dicke betrachten. Ein Volumelement des Leiters $\mathfrak{S}$ mit Einschluss seiner Oberflächenelemente soll mit $d\tau_{\mathfrak{S}}$ bezeichnet werden.

Wir construiren ganz innerhalb des Leiters eine geschlossene Fläche F, deren Oberflächenelemente wir mit do_i bezeichnen. Den davon umschlossenen Raum nennen wir J und bezeichnen seine Volumelemente mit $d\tau_i$. In jedem derselben kann wahre Elektricität von der Dichte ε_w sitzen. Die Summe der wahren Elektricität im Raume J ist daher:

$$S_i = \int \varepsilon_w \, d\tau_i.$$

Andererseits ist:

$$\frac{D}{4\pi}\frac{d\varepsilon_w}{dt} + L\varepsilon_w = 0,$$

wie aus den Gleichungen C folgt; daher hat man:

$$\frac{dS_i}{dt} = \int\limits_J \frac{d\varepsilon_w}{dt} d\tau_i = -\frac{4\pi L}{D}\int\limits_J \varepsilon_w \, d\tau_i.$$

Dies muss aber nothwendig gleich der negativ genommenen und durch dt dividirten Menge der wahren Elektricität sein, welche während der Zeit dt durch die gesammte Fläche F austritt. Durch jedes Element do derselben tritt nach der Formel 20 während der Zeit dt die Elektricitätsmenge:

$$L\,do_i\,dt\frac{d\varphi}{dn}$$

aus, wobei die Normale n in das Innere des Raumes J hineinzuziehen ist. Wir erhalten somit:

$$\int\limits_J \varepsilon_w d\tau_i = \frac{D}{4\pi}\int\limits_F do_i \frac{d\varphi}{dn}.$$

Ferner ist nach Formel 36:

$$\varphi = \frac{1}{\mathfrak{d}}\int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{\varepsilon_f d\tau_{\mathfrak{S}}}{\varrho} = \frac{1}{D}\int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{\varepsilon_w d\tau_{\mathfrak{S}}}{\varrho}.$$

Man findet somit:

$$\int\limits_F do_i \frac{d}{dn}\int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{\varepsilon_w d\tau_{\mathfrak{S}}}{\varrho} = 4\pi\int\limits_J \varepsilon_w d\tau_i.$$

Es ist dies ein bekannter, zuerst von Gauss aufgestellter und zum Beweise des Poisson'schen Theorems benutzter Satz der Potentialtheorie.[1])

§. 30. Mechanismus des unendlichen geradlinigen elektrischen Stromes. Energieumsatz an den Stellen der Wirksamkeit äusserer elektromotorischer Kräfte.

Es sei noch des einfachen Beispiels gedacht, das ich in den Sitzungsberichten der bayerischen Akademie, Bd. 22, 1892, berechnete, wo übrigens sowohl die Theorie als auch die Rechnung nicht frei von Fehlern ist. In einem sehr langen cylindrischen Drahte vom Radius ϱ, dessen Axe die Abscissenaxe ist, fliesse dieser parallel ein stationärer elektrischer Strom. Dann ist im Innern des Drahtes P constant. Wir wollen P_s gleich $a/\mathfrak{V}$ setzen, so dass $P_m = a$ ist. Der Index s drückt elektrostatisches, der Index m magnetisches Maass aus. Q und R verschwinden im Innern des Drahtes. Man erfüllt daher alle Gleichungen, wenn man ausserdem setzt:

$$\alpha = 0,\ \beta = \frac{2\pi L_s a z}{\mathfrak{V}^2} = 2\pi L_m a z,\quad \gamma = -\frac{2\pi L_s a y}{\mathfrak{V}^2}$$
$$= -2\pi L_m a y.$$

Die Stromdichte im elektrostatischen Maasse gemessen ist $a L_s/\mathfrak{V}$, also in magnetischem $a L_m$. Wir wenden im

[1]) Vgl. Riemann, Schwere, Elektricität und Magnetismus, 2 Ausg. S. 41; Poincaré, Electricité et Optique, I. Th., S. 7.

Folgenden immer magnetisches Maass an und lassen den Index m weg. Der Draht soll von einem coaxialen, zur Erde abgeleiteten Metallhohlcylinder vom Radius σ umgeben sein. Zwischen beiden soll sich Luft befinden, in welcher $L = 0$, $D = \mathfrak{d} = 1$ ist, und für welche alle übrigen Grössen den Index l bekommen. Dann ist im Innern des Drahtes:

$$\varphi = -\int P\,dx = -a\,x.$$

Die magnetische Kraft auf einen Magnetpol von der Stärke Eins ist an einer beliebigen Stelle im Innern des Drahtes:

$$\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = 2\,\pi\,L\,r\,a = \frac{2\,i}{r}.$$

r ist die Entfernung der betreffenden Stelle von der Axe des Drahtes, i die totale Intensität des Stromes, welcher den coaxialen Cylinder vom Radius r durchfliesst.

An der Oberfläche des Drahtes müssen, da die magnetische Kraft tangential zum Querschnitt ist, ihre Componenten α, β, γ zu beiden Seiten der Oberfläche gemäss der Gleichungen $\mathfrak{a}$ denselben Werth haben, was wir in folgender Form schreiben wollen: $\alpha = \alpha_l$, $\beta = \beta_l$, $\gamma = \gamma_l$ für $r = \varrho$. Ebenso erhält man $P = P_l$ für $r = \varrho$. Wegen der vollkommenen Symmetrie um die Axe muss jedenfalls:

$$\frac{Q_l}{y} = \frac{R_l}{z}$$

sein. Der Werth dieser Grössen aber hängt von der freien Elektricität ab, die sich auf der Drahtoberfläche ansammelt. Da die Bewegung aphot ist, müssen ferner P, Q, R die partiellen Ableitungen einer Funktion $-\varphi\,(x, r)$ nach den Coordinaten sein. Für $r = \varrho$ muss:

$$\frac{d\,\varphi}{d\,x} = -\,a,$$

für $r = \sigma$ aber $\varphi = 0$ sein. Da wir annehmen, dass in der Luft ursprünglich nirgends wahre Elektricität vorhanden war, so muss überall $\Delta\,\varphi = 0$ sein. Daraus folgt:

$$\varphi_l = -\,a\,x\,\frac{l\,\sigma - l\,r}{l\,\sigma - l\,\varrho} + b\,(l\,\sigma - l\,r), \quad P_l = a\,\frac{l\,\sigma - l\,r}{l\,\sigma - l\,\varrho},$$

$$Q = -\,\frac{a\,x\,y}{(l\,\sigma - l\,\varrho)\,r^2} + \frac{b\,y}{r^2}, \quad R_l = -\,\frac{a\,x\,z}{(l\,\sigma - l\,\varrho)\,r^2} + \frac{b\,z}{r^2},$$

$$\alpha_l = 0, \quad \beta_l = \frac{2\pi\,a\,\varrho^2\,L\,z}{r^2}, \quad \gamma = -\,\frac{2\pi\,a\,\varrho^2\,L\,y}{r^2}.$$

Die ebenfalls magnetisch gemessene Dichte der wahren Elektricität auf der Oberfläche des Drahtes ist mit der freien Elektricität identisch und hat (vgl. 15h), da Q und R im Innern des Drahtes verschwinden, den Werth:

$$E = -\frac{a x}{4 \pi \mathfrak{V}^2 \varrho (l \sigma - l \varrho)} + \frac{b}{4 \pi \mathfrak{V}^2 \varrho}.$$

Die zwischen den Wirbeln liegenden Friktionsröllchen sind, wie die für α, β, γ gefundenen Werthe zeigen, tangential in dem Sinne verschoben, in dem man von der positiven z-Richtung auf kürzestem Wege zur positiven y-Richtung gelangt, und zwar um Strecken, die der Entfernung von dessen Axe im Innern des Drahtes direkt, ausserhalb desselben verkehrt proportional sind. Sie werden daher mit einer der Verschiebungsrichtung genau entgegengesetzt gerichteten Kraft gegen ihre Ruhelage gezogen und üben auf die Wirbel eine gleichgerichtete Kraft aus, die also ebenfalls zu diesen und zum Cylinder tangential gerichtet ist und im Drahte an der von der Drahtaxe am meisten entfernten Stelle des Wirbels den grössten Werth hat. Die Gesammtkraft also, welche alle Friktionsröllchen auf einen Wirbel ausüben, sucht diesen in dem Sinne, in dem man von der positiven y-Axe auf kürzestem Wege zur positiven z-Axe gelangt, zu drehen und deckt den durch die Reibungskräfte (LP, LQ, LR, Joule'sche Wärme) verursachten Geschwindigkeitsverlust.

Dieser Spannungszustand muss natürlich durch äussere elektromotorische Kräfte erhalten werden, die wir uns an Stellen denken, wo x sehr grosse positive oder negative Werthe hat. Ausserhalb des Drahtes dagegen ist:

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{d\gamma}{dy}.$$

Die Rotation der Wirbel wird also dort durch die Friktionsröllchen nicht beeinflusst.

Wie würde sich nun die Sache ändern, wenn die äusseren elektromotorischen Kräfte nicht in unendliche Entfernung gerückt wären, sondern wenn z. B. in der Schicht zwischen $x = -c$ und $x = +c$, die wir kurz die kritische Schicht nennen wollen, $Y = Z = 0$ wäre, X aber einen constanten von Null verschiedenen Werth hätte, der natürlich sehr gross

sein müsste, wenn c sehr klein wäre? Dann würden zeitliche Veränderungen in der Dichte der wahren und freien Elektricität, daher Schwankungen in der Rotationsgeschwindigkeit der Wirbel, resp. elektrische Schwingungen auftreten, bis der elektrische Strom im ganzen Drahte gleich stark und parallel der Axe geworden wäre, also $P + X$ für die kritische Schicht denselben Werth hätte, wie P ausserhalb derselben, was wir in der Form $P_k + X = P_n$ schreiben wollen. Es müsste daher P in der kritischen Schicht entgegengesetzt, ausserhalb aber gleichbezeichnet mit X sein. Vermöge der dazwischen befindlichen Friktionsröllchen müsste sich P in die Luft hinein continuirlich fortsetzen, und es müsste daher auch in der Luft nahe an der Drahtoberfläche in der kritischen Schicht dem X entgegengesetzt, ausserhalb derselben aber gleichbezeichnet mit X sein. In grösserer Entfernung fände durch die dort auftretenden Werthe von Q und R die continuirliche Vermittelung statt.

Es entspricht dies genau dem Verlaufe der elektrischen Kräfte, welche nach der alten Theorie durch die auf der Drahtoberfläche angehäufte freie Elektricität erzeugt werden. Da überall P, Q, R die Ableitungen einer Funktion nach den Coordinatenaxen sind, so sind α, β, γ nicht Funktionen der Zeit und daher, wie aus den Gleichungen C und D ersichtlich ist, nur von dem Werthe abhängig, welchen die Grössen $P + X$, $Q + Y$, $R + Z$ innerhalb des Drahtes haben, da ausserhalb desselben:

$$L = \frac{dP}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$$

ist. $P + X$ hat aber innerhalb des Drahtes überall denselben Werth wie früher, als die elektromotorischen Kräfte in unendlicher Entfernung waren. Ebenso Q, R, Y und Z, welche sämmtlich verschwinden. Die magnetischen Kräfte α, β, γ sind also nicht von dem Orte der elektromotorischen Kräfte abhängig, sie wirken ebenso wie früher auf die Wirbel in der Luft gar nicht, auf alle Wirbel im Drahte aber gleichmässig beschleunigend in dem Sinne, in welchem man von der positiven y-Axe auf kürzestem Wege in die positive z-Axe gelangt. Dadurch werden wieder ausserhalb der kritischen Schicht die Wirbel trotz der Reibungskräfte in gleichförmiger Ro-

tation erhalten. Innerhalb der kritischen Schicht aber, wo sie ja entgegengesetzt rotiren, werden sie in ihrer Rotation aufgehalten.

Nach unserer mechanischen Vorstellung verhält sich also die Elektricität keineswegs wie eine Flüssigkeit, die durch ihren eigenen Druck im Drahte fortgetrieben wird, womit ja besonders die Ansammlung auf Flächen bis zur unendlichen Dichte unvereinbar ist. Sie verhält sich ja auch nach der alten Theorie nicht so, da sie nach letzterer nicht durch ihre inneren Druckkräfte, sondern durch die Fernwirkung der freien Elektricität auf der Oberfläche des Drahtes getrieben wird. Nach unserer mechanischen Vorstellung dagegen wird die treibende Kraft sogar ausschliefslich durch das umgebende Dielektricum vermittelt. Die elektromotorischen Kräfte versetzen zunächst nur die Wirbel im Innern desjenigen Theiles des Drahtes, der innerhalb der kritischen Schicht liegt, in Rotation. Durch Vermittelung der Friktionsröllchen werden sodann die Wirbel in der Luft an den dem Drahte benachbarten Stellen, dann auch die in der übrigen Luftmasse in Bewegung gesetzt. Diese erst greifen durch die Friktionsröllchen in diejenigen Wirbel ein, welche sich im Innern des Drahtes ausserhalb der kritischen Schicht befinden und versetzen sie in Rotation, treiben daher den elektrischen Strom. Vermöge des Ineinandergreifens des ganzen Mechanismus kann der Zustand nur stationär werden, wenn die negative Rotationsgeschwindigkeit P_k innerhalb der kritischen Schicht zu der positiven P_n ausserhalb derselben in einem ganz bestimmten Verhältnisse steht, das vom Verhältnisse der Widerstände w_n ausserhalb und w_k innerhalb der kritischen Schicht abhängt. Ist w_n gross gegen w_k, so ist P_n klein, daher $-P_k$ wenig kleiner als X; ist dagegen w_n klein gegen w_k, so ist P_n wenig kleiner als X, und P_k verschwindet fast. Natürlich gilt ganz analoges auch, wenn der Draht nicht geradlinig und unendlich, sondern irgendwie in sich zurücklaufend ist.

Wäre im ganzen Drahte X constant, $Y=Z=0$ (was für einen krummen Draht dem Falle entsprechen würde, dass überall die in der Drahtrichtung wirkende äussere elektromotorische Kraft constant ist), so wäre überall im Innern des Drahtes $P=Q=R=0$ und die gesammte Stromdichte wäre überall LX. Es würden

daher auch in der Luft nirgends Wirbel und daher auch weder freie noch wahre Elektricität auftreten. α, β, γ dagegen hätten genau dieselben Werthe wie früher. Die Friktionsröllchen hätten also dieselben Verschiebungen gegen ihre Ruhelage. Dies würde in der Luft wie früher nirgends Wirbel erzeugen, im Leiter aber den äusseren elektromotorischen Kräften entgegenwirkend die Wirbelbewegung, welche sonst von diesen erzeugt würde, aufheben.

Ich komme hier noch auf einen wichtigen Punkt zu sprechen, der bisher unerörtert blieb. Wenn wir die einfachen Gleichungen 8 und 9 acceptiren würden, so müsste in dem zuletzt betrachteten Falle keine Joule'sche Wärme entwickelt werden, und es würden die äusseren elektromotorischen Kräfte auch keine Arbeit leisten. Es würde daher ein elektrischer Strom mit magnetischer Wirkung ohne Arbeitsleistung und Wärmeentwickelung bestehen können. Ob dieser Fall nicht vielleicht bei den Molekularströmen, die nach Ampère's Hypothese den Magnetismus erklären, realisirt ist, lasse ich dahingestellt. Es müssten dann, wenn der Draht durchschnitten wird, und die entstehende elektrostatische Ladung den Strom zum Stillstand gebracht hat, die äusseren elektromotorischen Kräfte arbeiten und Joule'sche Wärme erzeugen, was freilich, wenn diese äusseren elektromotorischen Kräfte selbst in Molekularenergie (Wärme) ihren Ursprung hätten, nicht weiter bemerkt werden könnte, da ja nur Molekularenergie wieder in Molekularenergie umgesetzt würde.

Bei den Hydroketten entstehen die äusseren elektromoto-Kräfte jedenfalls durch chemische Bewegungen der Atome, welche, wenn die Kette offen ist, wenigstens in gewissen Grenzfällen vollkommen zum Stillstand gelangen, sobald der elektrische Strom durch die statischen Ladungen zum Verschwinden gebracht worden ist. Dann muss in Abwesenheit eines elektrischen Stromes, also für

$$P + X = Q + Y = R + Z = 0$$

auch $W = 0$ sein. Dies erreichen wir am einfachsten, wenn wir in den Gleichungen E und F setzen:

$$A = L(2PX + X^2 + 2QY + Y^2 + 2RZ + Z^2),$$

so dass diese Gleichungen übergehen in:

$$W = L[(P + X)^2 + (Q + Y)^2 + (R + Z)^2],$$
$$\Gamma = L[X(P + X) + Y(Q + Y) + Z(R + Z)],$$

welche Gleichungen in der That gewöhnlich für die entwickelte Wärme und aufgenommene Arbeit aufgestellt werden.

Es würde daraus folgen, dass, wenn die Batterie durch einen sehr grossen Widerstand geschlossen wäre, so dass $P + X$, $Q + Y$, $R + Z$ sehr klein wären, die in der Batterie entwickelte Wärme klein von der Ordnung $(P + X)^2$ wäre, also nahezu die gesammte chemische Energie der Batterie im Schliessungskreise als Wärme oder sichtbare Arbeit zum Vorschein käme (Thomson's Gesetz).

Es hindert uns jedoch nichts, zu A noch ein Glied von der Form

$$A[X(P + X) + Y(Q + Y) + Z(R + Z)]$$

hinzuzufügen, in welchem Falle dann in der Kette selbst eine Wärme entwickelt würde, die von derselben Grössenordnung ist, wie die an dem Schliessungskreis abgegebene Energie. Es würden dann die bekanntlich auch experimentell gefundenen Abweichungen vom Thomson'schen Gesetze platzgreifen.

Hört jedoch der Energieumsatz mit erlöschendem Strome nicht auf (Thermoketten, Diffusions-, Diaphragmenströme), so hindert uns nichts, dem A auch ein Glied von der Form

$$B(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

oder von einer noch complicirteren beizufügen. B ist wie früher A eine ganz beliebige Constante. Der Umsatz von Arbeit in Wärme oder von Wärme an einer Stelle in solche an einer anderen Stelle, welcher noch übrig bleibt, wenn die Kette offen ist, gilt dann freilich, da kein sichtbarer Strom, sondern bloss elektrostatische Ladungen an der Oberfläche vorhanden sind, nicht als elektrischer Vorgang; doch kann bei unserer Unbekanntschaft mit dem Wesen der Elektricität schwerlich entschieden werden, ob dabei nicht auch die Elektricität in Mitleidenschaft gezogen wird.

Der Energiebetrag, welcher von der Batterie während der Zeit dt auf ein beliebiges Volumelement $d\tau$ der übrigen Leitung, wo keine äusseren elektromotorischen Kräfte thätig sind, übertragen wird, bleibt hiervon natürlich unberührt. Er besitzt vollkommen unabhängig von dem Werthe des A den Werth $dt\,d\tau\,L(P^2 + Q^2 + R^2)$.

Anhang.

Ergänzung der Literaturübersicht.

I. Bücher, welche zu Maxwell's Elektricitätstheorie in Beziehung stehen.

von Helmholtz, Vorlesung über theor. Physik V. Elektromagn. Theorie des Lichtes (für demnächst angekündigt).

Poincaré, Electricité et optique. II. Paris. Carré 1891. Deutsch von Jäger und Gumlich. Berlin. 1892.

Duhem, P., Leçons sur l'éctricité et le magnetisme. I. u. II. Paris. 1891.

Kirchhoff, G., Elektricität und Magnetismus. Hrsg. von Planck. Leipzig, Teubner. 1891.

Reiff, R., Elasticität und Elektricität. Freiburg i. B. 1893.

Hospitalier, Traité élémentaire de l'énergie électrique. Paris, Masson. 1890.

Heaviside Oliver, Elektromagn. Lichttheorie. London, Taylor and Francis. 1890.

Heaviside, O., electrical papers. London, Macmillan. 1892.

Volkmann, Vorlesungen über die Theorie des Lichtes unter Rücksicht auf die elastische und elektromagnetische Anschauung. Leipzig, Teubner. 1891.

Lord Kelvin (Sir W. Thomson) math. and phys. papers. London, Clay I. 1882. II. 1884. III. 1890. Darin dessen fundamentale Abhandlung von 1847 abgedruckt (vol. I. art. 27). art. 99, 100 u. 102 (vol. III) behandeln vornehmlich die von ihm als gyrostatisch adynamisch, von Heaviside (Electrician. **26.** p. 360. 1891) als rotationell bezeichnete Constitution des Aethers.

Thomson, J. J., Notes on recent researches in electr. and magn. Oxford, Clarendon press. 1893.

Lodge Oliver, Modern views of electricity. London, Macmillan. 1889.

Meylan, E., Französische Bearbeitung desselben. Paris, Gauthier. 1891.

Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Leipzig, Barth. 1892. Sammlung der Abhandlungen desselben; darin auch Herrn W. v. Bezold's Untersuchungen über die elektrische Entladung.

II. Abhandlungen über die Grundlagen der Maxwell'schen Theorie.

a) Mit mechanischen Interpretationen der Grundgleichungen.

Sommerfeld, Mechanische Darstellung der elektrom. Erscheinungen in ruhenden Körpern. Wied. Ann. **46.** p. 139. 1892.

Boltzmann, Ueber ein Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen. Münchener Sitzungsber. 1892 (2). p. 279 und Wied. Ann. **48.** p. 78. 1893.

Betti, Ueber ein Theorem der Mechanik. Eine Anordnung, welche auf die Hertz'schen Gleichungen für den Elektromagnetismus führen. Rend. dell'Ac. dei nuov. Lincei (4) **7.** 1. Sem. p. 159. 1891.

Padova, Mechan. Interpret. der Hertz'schen Formeln. Rend. Lincei **7.** p. 204. 1891.

Bragg, Die Methode des elastischen Mediums in der Elektrostatik. Phil. Mag. (5) **34.** p. 18. 1892; deutsch: Phys. Rev. II. p. 354. 1892.

Cantoni, Bemerkungen über Fernwirkung. Rend. Lincei. 1891.

Thomson, J. J., Veranschaulichung der Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes mit Hilfe der Röhren elektrostat. Induction. Phil. Mag. (5) **31.** p. 149. 1891; deutsch: Phys. Rev. I. p. 316. 1892.

Helm, Fortpflanzung der Energie durch den Aether. Wied. Ann. **47.** p. 743. 1892.

Wittwer, Beiträge zur Aetherlehre. Verh. der Ges. der Naturf. und Aerzte. II. Bremen. 1890.

Hicks, rep. brit. ass. Aberdeen 1885. p. 930.

Lord Kelvin, rep. brit. ass. 1888, phil. mag. oct 1887. Die beiden letztgenannten Autoren behandeln die Theorie der Wirbelschwämme.

b) Specielle Veranschaulichungen.

Fitzgerald, über dessen Anschauungen und Modelle vgl. Nat. Mai 1889, Berichte der Scient. soc. of Manchester 1887. Phil. Mag. October 1887.

Poynting, Mechanisches Modell des dielektrischen Residuums. Proc. Birm. Phil. Soc. **6.** p. 2. 1889.

Larmor, Mechanische Darstellung eines elektrisch vibrirenden Systems. Proc. Cambr. Phil. Soc. **7.** p. 166. 1891.

Ebert, Modell zur Erläuterung der Inductionsgesetze. Wied. Ann. **49.** p. 642. 1893.

Vgl. auch den Katalog mathematisch-physikalischer Modelle zur projektirten Nürnberger Ausstellung. Hrsg. von W. Dyck, München. 1892.

c) Weitere Abhandlungen über die Maxwell'sche Theorie.

von Helmholtz, Folgerungen aus Maxwell's Theorie über die Bewegungen des reinen Aethers. Berl. Ber. p. 649. 1893.

Lorentz, H. A., Die elektromagn. Theorie von Maxwell und ihre Anwendung auf bewegte Körper. Arch. Néerl. d. Sc. exact et nat. **25.** p. 363—551. 1892.

Lodge, Ueber die Frage, welcher Bruchtheil des Aethers von den bewegten Körpern mitgenommen wird. Nat. **46.** p. 497. 1892 (anschliessend an die vorige Abhandlung).

Ebert, Versuch einer Erweiterung der Maxwell'schen Theorie. Wied. Ann. **48.** p. 1. 1893.

Boltzmann, Ueber einige die Maxwell'sche Theorie betreffenden Fragen. Wied. Ann. **48.** p. 100. 1893.

Heaviside, Electromagnetic Theory. Electrician. **26. 27.** 1891; **28. 29. 30.** 1892. Vgl. auch I., sowie Phil. Trans. Roy. Soc. of Lond. **183.** A. p. 423. 1892.

Volterra, Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Lum. él. (3) **29.** p. 147. 1891.

—— Ueber die Hertz'schen Gleichungen. Reduktion der Gleichungen für bewegte Körper auf eine symmetrische Form. Nuov. Cim. (3) **29.** p. 53. 1891.

Lamprecht, Gleichungen der elektromagn. Kraft. Wied. Ann. **43.** p. 835. 1891. Auch Jahresbericht des Gymnasiums Zittau. 1891.

Wien, W., Bewegung der Kraftlinien im elektromagn. Felde. Wied. Ann. **46.** p. 352. 1892.

—— Ueber den Begriff der Lokalisirung der Energie. Wied. Ann. **45.** p. 685. 1892.

Burbury, On the application of Lagrange's equations to certain physical problems. Proc. of the Cambr. Phil. Soc. vol. VI. pt. VI.

Poynting, Der primäre Vorgang des elektr. Stromes spielt sich im Dielektricum ab. Proc. Birmingh. Phil. Soc. **5.** p. 2. 1887.

Ermacora, Studium des Faraday'schen Feldes. Rend. Soc. della Soc. Ital. di el. (3) u. (4). 1892.

Brunhes, Die Maxwell'sche Theorie kein specieller Fall der Helmholtz'schen. Lum. éléctr. **40.** p. 15. 1891.

De la Rive, Théorie des elektrostatischen Druckes im Sinne der Faraday'schen Anschauung. Arch. de Gen. (3) **27.** p. 285. 1892.

Raveau, Bemerkungen über die Maxwell'sche Theorie. Lum. éléctr. **39.** p. 557. 1891.

Ueber die elektrostatische Wirkung variabler magnetischer Felder: Lodge, Phil. Mag. June. 1889.

Ueber die elektromagn. Wirkung der elektrischen Convection: Himstedt, Ber. der Oberh. Ges. f. Natur- und Heilkunde 1889. p. 44.

III. Andere auf die allgemeine Elektrodynamik Bezug habenden Abhandlungen.

von Helmholtz, Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik. Wied. Ann. **47.** p. 1. 1892.

Neumann, C., Beiträge zu einzelnen Teilen der mathemat. Physik, insbes. zur Elektrodynamik etc. Leipzig 1893; auch Ber. d. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1890. p. 87. 1892. p. 67.

Cohn, Elektrodynamik der Leiter. Wied. Ann. **45.** p. 55. 1892.

Larmor, Theorie der Elektrodynamik. Proc. Roy. Soc. **49.** p. 521. 1891.

Gray, Dynamische Theorie der elektromagn. Wirkung. Phil. Mag. (5) **30.** p. 441. 1890.

Beltrami, Ueber die mathematische Theorie des Magnetismus. Mem di Bologna (5) **1.** p. 409. 1891.

Righi, Aequivalenz von Magnetpol und Elementarstrom. Mem. di Bologna (5) **1.** 1890.

Vaschy, Es giebt keine Kraft zwischen ruhenden elektrischen und magnetischen Massen. C. R. **114.** p. 1474. 1892.

IV. Ueber elektrische Schwingungen im Allgemeinen.

Theorie der elektrischen Oscillationen.

Rosén, Anschliessend an Lorenz, Pogg. Ann. **131.** p. 243. 1867. Auch Berechnung des Einflusses von Leitern im Schwingungsfelde. Soc. physiogr. d. Lund. 1891.

Kolaček, Theorie der elektr. Schwingungen. Wied. Ann. **43.** p. 371. 1891.

Blondin, Zusammenfassende Besprechung der Fortpflanzung elektr. Störungen in Leitungsdrähten. Lum. él. **41.** p. 101. 1891.

Poincaré, Anomale Art der Fortpflanzung der Wellen. C. R. **114.** p. 16. 1892.

Larmor, Theoretisches über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Dielektricis. Proc. Cambr. Phil. Soc. **7.** p. 165. 1891.

Elektrische Schwingungen in Condensatoren und Spulen.

Darüber, dass Henry schon 1842 die Idee aussprach, dass die anormale Magnetisirung durch einen oscillirenden Charakter der Entladung erklärbar sei, siehe Lodge, modern views. p. 369.

Robb, Schwingungen bei der Ladung von Condensatoren. Phil. Mag. (5) **34.** p. 390. 1892; deutsch: Phys. Rev. II. p. 726. 1892.

Murani, Entladung von Condens. Rend. Ist. Lomb. (2) **24.** p. 425. 1891.

Gray, Dasselbe. Report of the Brit. Ass. Edinb. p. 642. 1892.

Lodge, Entladung von Leydener Flaschen. Proc. R. Soc. Lond. **50.** p. 2. 1891.

Salvioni, Einfluss von Capacitäten auf die Schwingungsdauer. Rend. Linc. **7.** p. 250. 1892.

Janet, Bestimmung des Selbstinductionscoëffic. mit Hilfe elektr. Schwingungen. C. R. T. **115.** p. 1286. 1892.

—— Untersuchung der diel. Hysteresis und Viscosität mit Hilfe el. Schw. C. R. **116.** p. 273. 1893.

—— Hierüber auch C. R. **115.** p. 875. 1892 und Soc. franç. de phys. p. 6. 1893.

Trowbridge, Dämpfung in Eisendrähten. Grosser Einfluss der Magnetisirungsconstanten auf das Decrement. Sill. Journ. (5) **42.** p. 223. 1891 u. Phil. Mag. (5) **32.** p. 504. 1891; deutsch Phys. Rev. p. 201. 1892.

—— und Sabine. Schwingungen in der Luft. Dielektr. Hysteresis. Proc. Americ. Soc. p. 109. 1890.

—— —— Dasselbe. Untersuchung nach der Methode Feddersens. Phil. Mag. (5) **30.** p. 323. 1890.

Righi, Specielles über den elektr. Funken. Mem. di Bol. (5) **1.** 1891.
—— Allmählicher Funkenübergang. Ist. d. Sc. di Bol. p. 315. 1891.
Colson, Interferenz el. Wellen. Soc. franç. de phys. p. 2. 1892.
—— Untersuchung mit dem Telephon. C. R. **114.** p. 349. 1892 und **115.** p. 800. 1892.
Blondel, Oscillographes; Apparate zum Studium langsamer elektr. Schwing. C. R. **116.** p. 502. 1893.
Klemenčič, Absorption und Verzweigung elektr. Schwingungen in Drähten. Wien. Anz. p. 75. 1893.
Thomson, E., Anziehung von Drähten, in denen sich elektr. Schwing. vollziehen. La lum. él. **47.** p. 35. 1893.
Colley, Langsame elektr. Schwing. Wied. Ann. **42.** p. 102. 1891.

Theorie des Rhumkorff'schen Inductoriums.

Poincaré, C. R. **111.** p. 322. 1890.
Colley, Wied. Ann. **44.** p. 109. 1892.

Inductionswaage.

Wien, M., Wied. Ann. **49.** 1893.

Tesla-Versuche.

Tesla, Journ. El. Eng. Lond. **21.** p. 51. 1892.
—— La Nat. **19.** p. 162. 1891.
—— R. Inst. of Great Britain. 1892.
Thomson, Elektr. Zeitschr. p. 304. 343. 1892.
Ducretet, Lum. El. **44.** p. 122. 1892-
Schöntjes, Bull. de l'Ac. de Belg. (3) **24.** p. 321. 1892.
Janet, Journ. de phys. (3) **1.** p. 375. 1892.
Abstossung von Kupferplatten durch alternirende Elektromagnete: Thomson, E., Lum. él. (14) **48.** p. 35. 1893.

V. Hertz'sche Schwingungen.

Theoretisches.

Lodge, Elektrostatische Kraft von Leitern Hertz'scher Schwingungen. Elektric. **25.** p. 712. 1890.
—— schlägt für die Hertz'sche Resonanz den Namen Syntonie vor. Nat. **44.** p. 248. 1891.
Poincaré, Theorie der Hertz'schen Schw. C. R. **113.** p. 515. 1891. **114.** p. 1046. 1892.
—— Periode der Hertz'schen Erreger für verschieden gestaltete Zimmer berechnet. C. R. **112.** p. 658. 1891.
—— Theorie der multiplen Resonanz (siehe Blondlot). Arch. de Gen. (3) **25.** p. 609. 1891.
Elsass, Wied. Ann. **49.** p. 487. 1893.
Boltzmann, Ueber das den Newton'schen Farbenringen analoge Phänomen für Strahlen elektrischer Kraft. Münchener Ber. (1) **22.** p. 248. 1892; Wied. Ann. **48.** p. 63. 1893.
Niven und Lamb, phil. trans. 1881 und 1883.
J. J. Thomson, math. soc. proc. 1884.

Demonstrationen, populäre Darstellungen.

Lucas und Garret, Demonstration; der Hertz'sche Funke entzündet ein Gasgemisch. Phil. Mag. (5) **33.** p. 299. 1892.

Fitzgerald, Demonstration durch Einschaltung eines Galvanometers (40,000 Ω) in die Funkenstrecke. Roy. Inst. of Great. Brit. 1890.

Emden, Photographie Hertz'scher Schwingungen. Arch. de Gen. (3) **26.** p. 483. 1891.

Hagenbach u. Zehnder, Natur der Funken. Wied. Ann. **43.** p. 610. 1891.

Zehnder, Hertz'sche Versuche in objektiver Darstellung und der Hochspannungsaccumulator. Wied. Ann. **49.** p. 549. 1893.

Voller, Ber. über d. Sectionssitzung des intern. Elektr. Congr. zu Frankfurt 1891.

Sir W. Thomson, Geschwärztes Papier ist für Hertz'sche Schwingungen durchsichtig. Elektric. **26.** p. 694. 1891.

Trouton, Einfluss der Grösse des Reflectors. Phil. Mag. (5) **32.** p. 80. 1891.

Lodge, Vorlesungsversuch über elektr. Resonanz. Nat. **41.** p. 368. 1890.

Lecher, Populäre Darstellung der H. Versuche. Wien, Hölzel. 1890.

Righi, Ueber einige experimentelle Anordnungen zur Demonstration der Hertz'schen Versuche. Rend. Lincei. p. 333. 1893.

Vorwiegend experimentellen Inhaltes.

Hertz, Mechanische Wirkung elektr. Drahtwellen. Wied. Ann. **42.** p. 407. 1891.

Franke, Untersuchung mit dem Quadranten-Elektrometer. Wied. Ann. **44.** p. 713. 1891.

Arons und Rubens, Brechungsindex Hertz'scher Schwingungen in verschiedenen Dielektricis für tropfbare Isolatoren. Wied. Ann. **42.** p. 581. 1891.

—— Dasselbe für feste Isolatoren. Wied. Ann. **45.** p. 206. 1891.

—— Ferner: Wied. Ann. **45.** p. 381 u. 553. 1892.

Grimaldi, Hieran anschliessend Aehnliches. Rend. Lincei. **7.** p. 125. 1891.

Waitz, Aehnliches. Wied. Ann. **44.** p. 527. 1891.

Ellinger, Brechungsindex in Wasser. Wied. Ann. **46.** p. 513. 1892.

—— in Alkohol. Wied. Ann. **48.** p. 108. 1893.

Blondlot, Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Dielektricis. C. R. **115.** p. 225. 1892.

—— C. R. **113.** p. 628. 1891.

—— Journ. de phys. (2) **10.** p. 549. 1891; deutsch: Phys. Rev. I. p. 171. 1892.

Cohn, Schwingungen in Wasser. Wied. Ann. **45.** p. 370. 1892.

Cohn u. Heerwagen, Wied. Ann. Periode sehr schneller Schwingungen. Wied. Ann. **43.** p. 343. 1891.

Blondlot, Multiple Resonanz. Neue Anordnung des Empfängers. C. R. **114.** p. 283. 1892; deutsch: Phys. Rev. I. p. 308. 1892.

Poincaré, Referat hierüber C. R. **114.** p. 645. 1892.
—— Theorie hierzu Arch. de Gen. (3) **25.** p. 609. 1891.
Blondlot und Dufour, Resonanz bei unsymmetrischer Anordnung des Stromkreises. C. R. **114.** p. 347. 1892; deutsch: Phys. Rev. I. 469.
Bjerknes, Eindringen der Wellen in Metalle. Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. zu Stockholm 1893. Hierüber auch, sowie über multiple Resonanz, Dämpfung und Absorption. Wied. Ann. **44.** p. 44. 92. 513. 1891; ferner Wied. Ann. **47.** p. 69. 1892.
—— Zerstreuung der elektr. Energie beim Hertz'schen Resonator. C. R. **115.** p. 725. 1892; deutsch: El. Zeitschr. p. 72. 1893.
Tesla, Dasselbe. Electrician. **30.** p. 271. 1892; französisch: La Lum. él. **47.** p. 91. 1893.
Perot, Ueber Hertz'sche Schwingungen. Anschliessend an Blondlot. C. R. **114.** p. 165. 1892.
—— Ausbreitung und Dämpfung. C. R. **115.** p. 1284. 1892.
Zehnder, Reflexion und Resonanz. Ber. d. Naturf. Ges. Freiburg i. B. **7.** p. 38. 1893.
—— Wied. Ann. **47.** p. 77. 1892. **49.** p. 724. 1893.
Puppin, Resonanz. Sill. Journ. **45.** p. 325. 1893.
Sarasin und de la Rive, Ausbreitung in der Luft. C. R. **112.** p. 658. 1891.
—— Wellenlänge in der Luft gleich der Drahtlänge des primären Leiters. C. R. **115.** p. 1277. 1892.
—— Dasselbe. Reflexion an Metallplatten. Arch. de Gen. **29.** (3) p. 358 und 441. 1893.
—— Erzeugung primärer Hertz'scher Funken in flüssigen Dielektricis. C. R. **115.** p. 439. 1892; deutsch: Phys. Rev. II. 476. 1892.
Klemenčič, Reflexion an Schwefel- und Metallplatten. Wied. Ann. **45.** p. 62. 1892.
—— Wied. Ann. **46.** p. 315. 1892.
Klemenčič und Czermak, Interferenz in der Luft. Wien. Ber. **101.** p. 635. 1892.
—— Fresnel's Spiegelversuch für Strahlen elektr. Kraft. Wien. Ber. **101.** p. 935. 1892.
Righi, Alcune esperienze con oscillazioni di Hertz. Rend. Linc. p. 505. 1893.
Rubens, Stehende Wellen in Drähten. Messung. Wied. Ann. **42.** p. 154. 1891.
Silow, Interferenz. Arch. de Gen. (3) **27.** p. 536. 1892.
Boys, Briscoe und Watson, Messung durch Wärmewirkungen. Phil. Mag. (5) **31.** p. 44. 1891.
Birkeland, Schwingungen in Drähten. C. R. **116.** p. 93. 499. 625. 803. 1893. Wied. Ann. **47.** p. 583. 1892.
v. Geitler, Reflexion von Drahtwellen. Bonn, Dissert. 1893 und Wied. Ann. **49.** p. 184. 1893.
Toepler, Wied. Ann. **46.** p. 306. 464. 642. 1892.

Garbasso, Sopra il fenomeno della nisonanza multipla. Acad. di Torino. Vol. **28.** 1893.

—— sulla riflessione dei raggi di forza elettrica. Jeder Draht des Hertz'schen Gitters fungirt als absorbirender Resonator. Ebenda.

Elektrische Schwingungen in Geissler-Röhren.

Ebert und E. Wiedemann, Elektrische Entladungen in Geissler-Röhren sind von Oscillationen begleitet. Phys. Medic. Ges. zu Erlangen 14. Dec. 1891 und 8. Febr. 1892.

—— Ueber elektr. Entladung, Erzeugung elektr. Oscillationen und die Beziehungen der Entladungsröhren zu denselben. Wied. Ann. **48.** p. 549. 1893.

—— elektrodyn. Schirmwirkung. Wied. Ann. **49.** p. 1. 1893.

Trowbridge, Phil. Mag. (5) **30.** p. 480. 1890.

E. Wiedemann und Ebert, Bemerkungen hierzu. Phil. Mag. (5) **31.** p. 288. 1891. Ferner Rep. Edinb. p. 637. 1892.

Puppin, Sill. Journ. (3) **43.** p. 463. 1892.

Swinton und Campbell, Phil. Mag. p. 142. 1893.

J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) **30.** p. 129. 1890 und Proc. Roy. Soc. **49.** p. 84. 1891.

—— in Vacuumröhren ohne Elektroden. Phil. Mag. (5) **32.** p. 321. 445. 1891; deutsch: Phys. Rev. I. p. 212. 1892.

—— Dasselbe. Electrician. **27.** p. 68. 1891.

Borgmann, Aehnliches. J. d. russ. ph. chem. Ges. **23.** II. p. 458. 1891 und Electrician. **26.** p. 787. 1891.

VI. Arbeiten über Dielektricität.

Theorie der Dielektrica.

Hess, Cas particulier, de la théorie des dielectriques hétérogènes donnée par Maxwell. Soc. franç. de phys. p. 3. 1892.

Chattok, An Electrolytic Theory of Dielectrics. Phil. Mag. p. 461. 1892.

Poincaré, Ueber das Gleichgewicht dielektr. Flüssigkeiten in einem elektr. Felde. C. R. **112.** p. 555. 1891.

Dielektricitätsconstante von festen und tropfbaren Isolatoren.

Blondlot, von Glas mittelst Hertz'scher Schwingungen. C. R. **112.** p. 1058. 1891.

—— J. de Phys. (2) **10.** p. 197. 1891; deutsch: Phys. Rev. I. p. 121. 1892.

Lecher, Dielektricitätsconst. mittelst Hertz'scher Schw. Wied. Ann. **42.** p. 142. 1891.

Bouty, von Glimmer. Condensatormethode. C. R. **112.** p. 931. 1891.

—— Kaliglimmer. Ann. chim. phys. (6) **24.** p. 394. 1891; deutsch: Phys. Rev. I. 76. 1892.

Elsass, Wied. Ann. **44.** p. 654. 1891.
Werner, Wied. Ann. **47.** p. 613. 1892.
Perot, Messung durch elektrom. Schw. Terpentin, Harz, Wachs, Glas. C. R. **115.** p. 38. 1892.
— Messung für Harz und Glas nach fünf verschiedenen Methoden (elektr. Schwing., ballist. Galvanom., Kohlrausch, Boltzmann, Ablenkung der Niveaulinien). C. R. **115.** p. 165. 1892.
— Methode der Bestimmung von D. durch Untersuchnng der Brechung der Niveaulinien an der Grenzfläche zweier Dielektrica. C. R. **113.** p. 415. 1891.
— J. d. Phys. (2) **10.** p. 149. 1891.
Lefèvre, Paraffin, Schwefel etc. Methode: Anziehung von Condensatorplatten. C. R. **114.** p. 834. 1892.
Cardani, Schwefel. Rend. Linc. (5) **1.** p. 48 u. 91. 1892.
Tschegläjew, Ebonit, Glas etc., auch Elektrolyte. J. der russ. phys. chem. Ges. **23.** II. p. 470. 1891.
Trouton und Lilly, Methode: Drehung einer aus dem Dielektricum verfertigten Elektrometernadel im inhomogenen Felde. Phil. Mag. (5) **33.** p. 529. 1892; deutsch: Phys. Rev. II. p. 212. 1892.
Cohn, Ueber die Gordon-Winkelmann'sche Methode. W. A. **46.** p. 135. 1892.

Dielektricitätsconstanten von Elektrolyten.

Rosa, Wasser, Alkohol, viele Oele. Auch Temperaturcoëffic. Postulirt die Superposition von elektrolytischer Leitungsfähigkeit und dielektrischem Vermögen. Phil. Mag. (5) **31.** p. 188. 1891; deutsch: Phys. Rev. I. p. 233. 1892.
— Weiteres hierüber. Methode dielektr. Fernwirkung im inhomogenen Felde. Phil. Mag. (5) **34.** p. 344. 1892; deutsch: Phys. Rev. II. p. 600. 1892.
Bouty, Aehnliches. C. R. **114.** p. 533. 1892; deutsch: Phys. Rev. I. p. 476. 1892.
— Eis und feste Salze. Ann. de chim. (6) **27.** p. 62. 1892; deutsch: Phys. Rev. II. p. 478. 1892.
— Journ. de phys. p. 244. 1892; deutsch: Phys. Rev. II. p. 588. 1892.
— C. R. **114.** p. 1421. 1892.
Cohn, Aehnliches. C. R. **115.** p. 802. 1892.
Heerwagen, Eine Nullmethode zur Messung von Dielektricitätsconst. in Elektrol. Wied. Ann. **48.** p. 35 ff. 1893.

Vorwiegend Studium des Temperaturcoëfficienten.

Cassie, Die Dielektricitatsconst. nimmt mit steigender Temperatur bei festen Körpern zu, bei Flüssigkeiten ab. Phil. Trans. p. 1. 1890; deutsch: Phys. Rev. I. p. 98. 1892.
— Trans. Roy. Soc. Lond. **181.** A. pt. 1. 1891.
Negreano constatirt dasselbe für Flüssigkeiten.

Heerwagen untersucht den Temperaturcoëffic. für Wasser. Wied. Ann. 49. p. 272. 1893.

Franke, Elektrolyte, vornehmlich Wasser. Kritik der Mossotti-Clausius'schen Formel. Wied. Ann. 1893.

Bouty für Glimmer. C. R. 112. p. 1310. 1891.

Dielektricitätsconstante von Gasen und Dämpfen.

Lebedow, Dielektricitätsconst. der Dämpfe. Kritik der Mossotti-Clausius'schen Formel. Wied. Ann. 44. p. 288. 1891.

Jahn, Molekular-Refraktion für unendlich lange Wellen. Berl. Ber. 21. Juli 1892.

Weber, H., Dielektricitätsconst. von Gasen bei Drucken bis zu 11 Atmosphären; auch von festen Körpern. Bull. de la Soc. des Sc. nat. de Neuchatel. XXI. 1893.

Verschiedenes.

Borel, Ch., Phénomènes d'hystérésis dans les dielectriques Arch. de Gen. 1893. 29. (3) p. 317.

Benischke, Experimentaluntersuchungen über Dielektrica. Wien. Anz. 1893. p. 91.

Grätz und Fomm, Dielektrischer Spannungsmesser für elektr. Oscillationen. Münchener Ber. 23. p. 245. 1893.

VII. Optik vom Standpunkte der Elektricitätslehre.

Bezüglich der Geschichte vgl. Zöllner, Ber. der Kgl. sächs. Ges. d. Wissensch. 12. Febr. 1876. p. 166.

von Helmholtz, Elektromagn. Theorie der Farbenzerstreuung. Wied. Ann. 48. p. 389 und 723. 1893.

Goldhammer, Dispersion und Absorption. Wied. Ann. 47. p. 93 und 265. 1892.

Ketteler, Notiz, betr. die Möglichkeit einer zugleich den elastisch-optischen, wie den elektromagn. Prinzipien entsprechenden Dispersionsformel. Wied. Ann. 49. p. 382. 1893.

—— Grenzbrechungsexponenten für unendlich lange Wellen. Wied. Ann. 46. p. 572. 1892.

Drude, Inwieweit genügen die bisherigen Lichttheorien den Anforderungen der praktischen Physik. K. Ges. d. Wissensch., Göttingen. p. 366. 1892.

—— Beziehungen der Dielektricitätsconst. zum optischen Brechungsexponenten. a. a. O. p. 82. 1893.

—— Dasselbe. Wied. Ann. 48. p. 536. 1893.

J. J. Thomson, On Maxwell's Theory of Light. Phil. Mag. 9. p. 284. 1880.

Padova, Ueber die Elektromagn. Lichttheorie. Nuov. Cim. (3) 29. p. 225. 1891.

Ebert, Mechanik des Leuchtens vom Standpunkte der elektromagn. Lichttheorie. Arch. des Sc. Phys. et. Nat. Genf (3) **25.** p. 489. 1891.

—— Elektrische Schwingungen molekularer Gebilde. Wied. Ann. **49.** p. 651. 1893.

Hierüber auch Richarz, Sitzungsber. d. niederrhein. Ges. in Bonn, 12. Jan. 1891.

Stoney, Erklärung der Doppellinien durch Mitschwingen der Ladung der Valenzen bei den Lichtschwingungen. Trans. Dubl. Soc. (2) **4.** p. 563. 1891. Phil. Mag.

Basset, Eine elektromagn. Theorie für den Quarz. Phil. Mag. (5) **30.** p. 152. 1890. Ueber die elektromagn. Lichttheorie auch Cap. 19 u. 20 seiner A treatise on physical optics, Cambridge 1892.

Fletcher, The optical indicatrix and the transmission of Light in crystalls. London, Frowde. 1892.

Du Bois und Rubens, Polarisation ungebeugter ultrarother Strahlung durch Metalldrahtgitter. Wied. Ann. **49.** p. 593. 1893. Diese Wirkung wird mit der Hertz'scher Gitter auf elektrische Wellen in Analogie gebracht.

Magneto-optische Erscheinungen.

Goldhammer, Wied. Ann. **46.** p. 353. 1892.

—— Theorie des Kerr'schen Phänomens und der magn. Circularpolarisation. Wied. Ann. **46.** p. 71. 1892.

Basset, Dasselbe. Proc. Roy. Soc. Lond. **49.** p. 76. 1891.

Drude, Berechnung magneto-optischer Erscheinungen. Wied. Ann. **46.** p. 353. 1892. **48.** p. 122. 1893. **49.** p. 690. 1893.

Hinrichs, Theorie d. magnet. Drehung. C. R. **113.** p. 500. 1891.

Gray, Bemerkungen über die elektromagn. Theorie der Drehung der Polarisationsebene. Rep. Brit. Ass. Cardiff. p. 558. 1891.

—— Magneto-optische Erzeugung von Elektricität. Sheldon's Versuch (Umkehrbarkeit des Versuchs der magn. Drehung der Polarisationsebene) wird widersprochen. Phil. Mag. (5) **30.** p. 494. 1890.

Minchin, Aehnliches. Electrician. **25.** p. 657. 1890.

Kern, On dispersion in double refraction due to electric stress. Rep. Edinb. p. 157. 1892.

Sissingh, Magneto-opt. Phänom. bei äquatorialer Magnetisirung an Eisen. Wied. Ann. **42.** p. 115. 1891.

Kathodenstrahlen.

Darüber, dass dünne Metallschichten für dieselben durchsichtig sind, vgl. Art. 44 der Abh. von E. Wiedemann und H. Ebert, phys. med. Soc. zu Erlangen, 14. Dec. 1891.

Hertz, Dasselbe. Wied. Ann. **45.** p. 28. 1892.

Lenard, Studium in Gasen bei verschiedenem Druck. Atmosphärische Luft ein trübes Medium. Aluminiumfensterchen.

VIII. Verschiedenes.

Neue V-Bestimmungen.

Abraham, Ann. de chim. et de phys. p. 433. 1892. Soc. franç. de phys. p. 2. 1892; deutsch: Phys. Rev. II. p. 612. 1892.
Webster, Rep. Brit. Ass. Cardiff. p. 580. 1891.
Thomson, J. J. u. Searle, Phil. Trans. Lond. **181.** A. p. 583. 1890.
Pellat, C. R. **112.** p. 783. 1891.

Magneto- und Elektrostriktion.

Ewing, Handbuch hierüber. London 1892.
Duhem, Elektrostriction der Krystalle. Ann. sc. de l'Éc. norm sup. (3) **9.** p. 167. 1892.
—— Theorie der Magneto- und Elektrostriction. C. R. **112.** p. 657. 1891.
Pockel's Polemik gegen Duhem. Jahrb. für Min. Geol. u. Pal., Beilagebd. **8.** p. 407. 1892.
—— Grunert's Archiv (2) **12.** p. 57. 1893.
Quincke, Tagebl. der 62. Naturf. Ges. Heidelb. 1889. p. 209.
Berget, Journ. de phys. (3) **2.** p. 172. 1893.
Kuott, Trans. Roy. Soc. Edinb. (2) **36.** p. 485. 1891.
—— Electrician. **29.** p. 430. 1892.
—— Rep. Edinb. p. 659. 1892.
Cantone, Mem. Linc. **6.** 1890.
Kopp, Elektrostriction kugelförmiger Condensatoren. Inaug.-Diss. Leipzig, 1890.

Magnetischer Fluss.

Pisati, Gesetze der magnetischen Strömung. N. Cim. (3) **31.** p. 58 u. 125. 1892; deutsch: Phys. Rev. II. p. 346. 1892.
—— Anomalien. N. Cim. (3) **31.** p. 228. 1892.
Steinmetz, Magnetischer Kreislauf, scheinbarer magnet. Widerstand etc. El. Zeitschr. **12.** p. 1. 13. 573. 1891. **13.** p. 203 ff. 1892.
—— Electrician. **26.** p. 261. 1891.
Föppl, El. Zeitschr. **12.** p. 203. 1891.
Kennely, El. Zeitschr. **13.** p. 205. 1892.
Du Bois, Sectionsber. d. el. Congresses in Frankfurt a. M. 1891.
Collins, E. jr., Mass Inst. of Fechn. 1890.
Lang, R., Das Ohm'sche Gesetz beim magnet. Fluss. Heilbronner Gymnasialprogramm 1892.
Fröhlich, Aehnliches. El. Zeitschr. p. 365 ff. 1893.
Ewing, Phil. Mag. (5) **34.** p. 320. 1892.

Nr.		Seite
42)	$D_1 N_1 = D_0 N_0, \quad D_1 \frac{d\varphi_1}{dn} = D_0 \frac{d\varphi_0}{dn}$	47
43)	$\varphi = \frac{1}{\mathfrak{d}} \int_U \frac{\varepsilon_f \, d\tau}{\varrho} = \frac{1}{\mathfrak{d}} \left[\int_J \frac{\varepsilon_f \, d\tau}{\varrho} + \int \frac{E_f \, do}{\varrho} \right]$	47
44)	$\mathfrak{x} \, dx\,dy\,dz = \frac{D-\mathfrak{d}}{4\pi} P \, dx\,dy\,dz$	48
44 $\mathfrak{X}$)	$\mathfrak{x}' = \varepsilon'(P+\mathfrak{X}), \quad \mathfrak{y}' = \varepsilon'(Q+\mathfrak{Y}), \quad \mathfrak{z}' = \varepsilon'(R+\mathfrak{Z})$	132
45)	$\frac{\mathfrak{d}\, dx\,dy\,dz}{4\pi} \left[\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right] - \frac{dx\,dy\,dz}{4\pi} \left[\frac{d(DP)}{dx} + \frac{d(DQ)}{dy} + \frac{d(DR)}{dz} \right] = \varepsilon_p \, dx\,dy\,dz$	48
46)	$\mathfrak{x} = \frac{D-\mathfrak{d}}{4\pi} P = \varepsilon_{vH} . P$	49
46 m)	$\frac{M-\mathfrak{m}}{4\pi} \alpha$	95
47)	$\frac{\mathfrak{x}^2}{2\,\varepsilon_{vH}} = \frac{\varepsilon_{vH}}{2} P^2 = \frac{P^2}{8\pi}(D-\mathfrak{d})$	50
48)	$\frac{e_f . e_n}{\mathfrak{d}\,\varrho^2}$	52
49)	$\varepsilon_f = \frac{\mathfrak{d}}{D} \varepsilon_w, \quad E_f = \frac{\mathfrak{d}}{D} E_w$	55
50)	$T = \frac{1}{8\pi} \int D \, d\tau \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \int_U \varphi \, \varepsilon_w \, d\tau = \frac{1}{2\mathfrak{d}} \iint_{U\,U} \frac{\varepsilon_w \, \varepsilon_f' \, d\tau \, d\tau'}{\varrho}$	56
51)	$T = \frac{1}{2D} \iint_{U\,U} \frac{\varepsilon_w \, \varepsilon_w' \, d\tau \, d\tau'}{\varrho}$	56
52)	$T = \frac{1}{D} \left[\frac{1}{2} \iint_{U\,U} \frac{d\tau_1 \, d\tau_1' \, \varepsilon_1 \, \varepsilon_1'}{\varrho} + \frac{1}{2} \iint_{U\,U} \frac{d\tau_2 \, d\tau_2' \, \varepsilon_2 \, \varepsilon_2'}{\varrho} + \iint_{U\,U} \frac{d\tau_1 \, d\tau_2 \, \varepsilon_1 \, \varepsilon_2}{\varrho} \right]$	56
53)	$-\delta T_{12} = \frac{1}{D} \delta \iint_{U\,U} \frac{\varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \, d\tau_1 \, d\tau_2}{\varrho}$	57
54)	$\frac{e_w \, e_w'}{D \varrho^2}$	57
54 m)	$m_w \alpha = \frac{m_w . m_w'}{M \varrho^2}$	98

